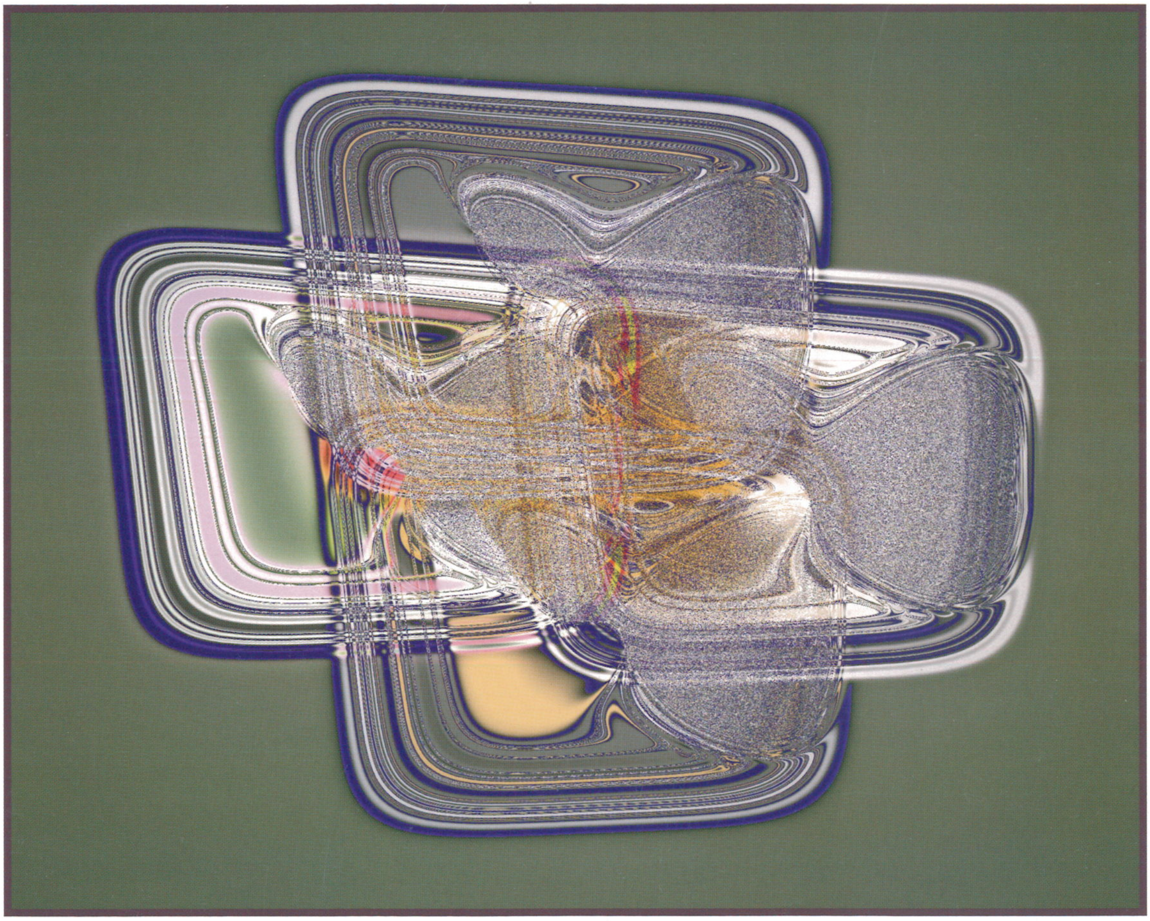
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年3月1日発行　第46巻3号　毎月1回1日発行

ISSN 0386―2240

数理科学

3
2008

特集 現代物理のための数学キーワード
最先端へのパスポート



No.537

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 537 March 2008

現代物理のための数学キーワード

最先端へのパスポート

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2005 年/1 省略
2005 年/2　エンタングルメント理論とその展開
/3　最新 脳の数学理論
/4　量子重力理論最前線
別冊　相対論の歩み
/5　ベクトル
/6　物理法則と方程式
/7　量子異常とは何か
/8　モジュライの広がり
/9　対称性とは何か
/10 不確定性原理の新展開
別冊　スーパーストリング
/11 0 の発見
/12 現代代数学への誘い
2006 年/1　偶然から必然へ
/2　物理法則の直観的理解
/3　〈強い力〉
/4　「空間」とは何か
別冊　量子の新世紀
/5　数学と物理の対話
/6　発見とひらめき
/7　重力は語る
/8　ネットワーク科学の数理
/9　ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007 年/1　ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2　ランダム行列の広がり
/3　現代物理における超対称性
/4　現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5　数学の直観的理解
/6　物理における位相の世界
/7　代数的物理観
/8　数学における場の量子論
/9　ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1　現象を視る
/2　ゲージ重力対応

数理科学臨時別冊一覧

07 年/1　ゲノム進化を考える
07 年/3　非平衡統計力学
07 年/5　超幾何関数入門
07 年/6　相対性理論
07 年/7　3 次元トポロジーの新展開
07 年/9　数理･情報系のための整数論講義
07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1　演習 くり込み群

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）

旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

March 2008 MATHEMATICAL SCIENCES Number 537

特集／現代物理のための数学キーワード

知っておきたい数学のことば

加藤 晃史

1. はじめに

本誌編集部の方とお会いした際,「ホモロジーや圏論といった物理学者にあまり浸透していない言葉をまとめた特集があるとよいのでは」というようなことをうっかり口にしたのがすべての始まりだった.

いつの間にか企画が進展し,「ご相談」の内容も予想外に増えてゆく. とはいえ自分が気になっている数学のキーワードについて, 専門家の方々が次々に書き下ろしてくれるという, まるで御前講義を聴くような貴重な体験ができた. それぞれの解説記事を通じて, このワクワクする感じを皆さんも共有して頂ければ幸いである.

2. キーワードたちのプロフィール

今回の特集で取り上げられている数学のキーワードは, 現代物理学で重要な役割を果たしているにも関わらず, 伝統的な「物理数学」の講義ではほとんど取り上げられないものばかりである. ただし, キーワードの選択に客観的な基準は無く, 私自身の個人的な興味を反映してかなり偏っていることを予めお断りしておかなければならない.

圏や関手は, 知りたい対象についてその内部構造には直接踏み込まず, 相互関係や機能に注目してものごとを記述しようとする方法論である. ミクロなものを対象とし, 内部構造でなく相互作用に注目せざるを得ない素粒子論から見れば極めて自然な発想だが, 物理学に圏論的方法論が持ち込まれたのは, Witten による位相的場の理論に刺激を受けて Segal や Atiyah が共形場理論や位相的場の理論を関手として公理化したのが最初だろう. ミラー対称性も, Kontsevich によって導来圏の同値性の予想として定式化されることで, その後の飛躍的な発展を見た. 今日, 導来圏の object は D-brane と同一視されているが, Kontsevich による定式化が Polchinski による D-brane の発見に先行する点も見過ごせない. 小林氏は, ややもすると無味乾燥になりがちな圏と関手について, 初心者にも親しみやすい解説を寄せて頂いた.

層は, 粗っぽく言えば定義域の決まっていない関数たちを扱う枠組みで, ある意味で物理学における「場」とよく似ている. 場は, 変換性などの局所的な性質で特徴づけられ観測は局所的に行われ, 宇宙の果てまで場が定義されている必要は無い. しかし, 空洞に閉じこめたりすると, スペクトル準位に空洞の形状が反映するなど, 完全に局所的な集合論的な関数概念とは一線を画している. 橋本氏は「現代数学における図形」という観点から, その勘所を押さえつつ我々を層の世界へ誘ってくれる.

ホモロジーは, 図形の複雑さを代数的な不変量に変換して計る枠組みである. 弦理論では, 素励

起の電荷や磁荷がブレーンの巻き付き方，より正確にはそのホモロジーで与えられるという考え方が浸透してきている．杉山氏は，ホモロジー群とBrouwer の固定点定理について，易しい語り口で解説して下さった．もともと固定点定理はキーワードには挙がっていなかったのだが，ホモロジーの応用としては最適であるし，場の理論と指数定理の関係を議論する際にも重要となる考え方であり，杉山氏ならではの解説となった．

ホモトピー論とは，連続変形で不変な性質，あるいはそもそも変形でつながるとはどういうことかを突き詰めて調べる分野である．弦理論の世界面は，点粒子の世界線のホモトピーを与えているという事だけでも，ホモトピー論が弦理論に果たす重要性を予感させるのに十分だろう．南氏の解説は，ホモトピー論が圏論や代数幾何をも巻き込みつつ成長してゆく様にまで迫り，その底知れなく深い世界を垣間見せてくれる．

微分方程式は「局所的な法則が大域的性質を規定する」という，Newton に始まり場の理論へと受け継がれてきた思想を体現する言語として，現代物理でも変わらぬ重要性を持ち続けている．

モノドロミーとは，微分方程式の解を解析接続してもとに戻るときにもとの解とどれくらいずれるかを表す量である．Ising 模型の相関関数，共形場理論と組みひも群，行列模型，超対称ゲージ理論など，モノドロミーなくして数理物理は語れない．木村氏は，モノドロミーの計算法や，モノドロミー保存変形という古くて新しい話題について，丁寧な解説をして下さった．

モジュライとは，何かを分類した結果を一つの幾何学的な対象として捉えようとする考え方である．弦理論では Riemann 面の複素構造のモジュライ空間が有名である．Seiberg–Witten による 4 次元 $N=2$ 超対称ゲージ理論の厳密解以降，理論に含まれる結合定数や質量を座標とする「理論のモジュライ空間」という言葉は物理用語として完全に定着している．向井氏は，数え上げ問題を例に挙げることで，モジュライ問題の源泉に遡った格調高い解説を寄せて下さった．

有向グラフの別名である quiver は，物理でも quiver gauge theory 等でおなじみで，ゲージ群と物質場の情報をコンパクトに表現するデータとして重宝される．数学ではある種の有限性を備えた非可換環を扱う一般的な枠組みとして近年急速に発展している．インスタントンで有名な ADHM 構成法の背後には，射影空間の連接層のなす圏が quiver で記述できるという事実がある．浅芝氏の解説では，限られた紙面にも関わらず近年著しい発展を遂げている quiver の表現論を要領よく整理されていて，研究現場の雰囲気を伝えてくれる．

D 加群は，微分方程式系を座標によらずに記述する枠組みである．代数解析学の基本概念であり，Riemann–Hilbert 対応，幾何学的表現論等，今なお現代数学の各地で凄まじい威力を発揮しつつあるハイテク兵器の感がある．そのようなヤバイものが物理学に入ってきたら取り返しのつかないことになると思うかもしれないが，場の演算子に親しんでいる物理学者には案外なじみ深いものなのかもしれない．清水氏には「D 加群について易しい解説をする」という無理難題に，見事に答えていただいた．

3. おわりに

なぜ物理学や自然科学で数学が役に立つのだろうか？

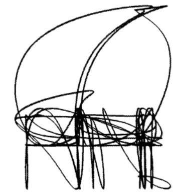
自然科学の目標は，自然現象の単なる記録ではなく，多数の事物に共通する法則を見出し，その法則から個々の現象を説明することにある．共通する法則を見つけるには，必然的にどのような違いを無視するか，つまり何らかの捨象が伴う．

数学では，捨象・抽象・概念化のプロセスが何のしがらみもなく自由に進む環境にある．自然との直接のつながりを持たない数学が自然科学で役に立つ本当の理由は，何を抽象し何を捨象すべきかについて，すぐれた指針を与えてくれることにこそあるのかもしれない．

（かとう・あきし，東京大学大学院数理科学研究科）

圏と関手

物理的対象の記述言語になるか？



小林　正典

1. はじめに

秋の夜長に鳴く虫は，たとえ姿は見えずとも，もののあわれを誘います．冬の夜空に輝く星は，手を触れることはできずとも，悠久の彼方に誘います．そこに何かは存在しても，まことに虫かまことに星か？ 何であれ観測される反応がもしすべて同じなら，区別するのは無理でしょう．相対的な関係のみが確からしい，そんな数学があります．

圏と関手は，群の準同型といった，構造つき集合の間の関係や，空間と関数の双対といった，異なる概念の等価性などを，簡潔に，かつ本質をついて記述する言語として重宝します．

オブジェクト指向言語で構造体を取り扱うように数学を使いたい，自分の思っている 1 と他人の思っている 1 は同じか悩ましくて数学が使えない，そんなあなたにも効く，かもしれません．

まず，モデルとなる，集合と写像を説明します．

2. 集合

素朴には，ものの集まりを**集合**と呼びます．$1, 2, 4$ の集まりを $\{1, 2, 4\}$ のように書き，$1, 2, 4$ は $S = \{1, 2, 4\}$ の**要素**あるいは**元**と呼ばれます．2 が S の要素であることを $2 \in S$ と書き，2 は S に**属する**と言います．3 は S に属さないので $3 \notin S$ と書きます．同じ S を $\{n \mid n$ は 4 の正の約数$\}$ のように，{ 要素 | 条件 } の形にも書きます．

集合の基本的性質は，S が集合であれば，(∗)「どんな x に対しても，x が S に属する・属さないがはっきり定まる」ということです．例えば，「どんな x に対しても，$x \notin S$」という S も集合であり，$\varnothing$ で表し**空集合**と言います．集合の和集合・共通部分・直積（要素の対の集合）は集合です．集合 S に対し，S の部分集合をすべて要素とする集合 2^S は S の**べき集合**と呼ばれます．$\{1, 2\}$ のべき集合は，$\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ です．

圏を勉強すると出会うことなので説明しますが，気楽にものの集まりとして集合を定義するとまずいことがあります．20 世紀初めにラッセル（Russell）は，S として，「自分自身を要素としない集合」の全体，を考えました．記号で書けば，$S = \{X \mid X \notin X\}$ です．さて S 自身が S に属するとしましょう．すると条件から $S \notin S$ となり，矛盾します．S が S に属さないとすると，やはり条件から $S \notin S$ が満たされないことになり矛盾します．つまり S を集合とすると矛盾が起きるのです．これは**ラッセルの逆理**と呼ばれています．

上のような，集合の全体といった集まりは，集合として扱うには大きすぎるので，現在広く用いられている**ツェルメロ（Zermelo）＝フレンケル（Fraenkel）の公理系**では排除されています（正則性公理：空でない集合 X には元 $Y \in X$ で，$x \in X$ かつ $x \in Y$ は決して満たされないものが存在する）．なお通常は，部分集合として非構成的な集合もほしいため，さらに**選択公理**も認めます．

3. 写像

関数 $y=2x$ は，数 x に対し，その 2 倍を y として与えます．一般に，関数 $y=f(x)$ とは，x を与えるごとに数 y がひとつずつ決まっているものでした．x や y が数とは限らないとき，$y=f(x)$ を**写像**と言います．例として数ベクトルの線形写像（1 次式で書ける写像）を見てみましょう．

n を自然数として，実数を成分とする n 次元列ベクトルの全体を $\boldsymbol{R}^n$ で表します．3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ に 2×3 行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$ を左から掛けると，2 次元ベクトル $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\end{pmatrix}$ ができます．A を固定しておくと，任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$ に対し $A\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2$ が一つずつ決まります．$f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ と書くとき，f_A は A で定まる $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像である，と言い，$f_A:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^2$ と書きます．

一般に，列ベクトルに行列 A を掛けて写像 $f_A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ を定めるとき，A の行列のサイズから m と n は決まってしまいます．A が正方行列なら $m=n$ であり，このような同じ集合の間の写像を**変換**と呼びます．A が n 次単位行列 E_n の場合，掛けても，n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ は元と同じ $\boldsymbol{x}$ のままです．f_{E_n} を $\boldsymbol{R}^n$ の**恒等変換**と言います．

A と $l\times m$ 行列 B があるとします．n 次元列ベクトルにまず A だけ掛けて $f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ を作り，さらに B を掛けて l 次元列ベクトル $f_B(f_A(\boldsymbol{x}))=B(A\boldsymbol{x})$ を与える写像を f_A と f_B の**合成写像**と言い，$f_B\circ f_A$ で表します．行列の積 BA を一気に掛けた $(BA)\boldsymbol{x}$ と同じになりますから，$f_B\circ f_A=f_{BA}$ となります．とくに，行列の掛け算写像の合成も，ある行列の掛け算写像です．

さらに $k\times l$ 行列 C に対し，積の結合法則 $(CB)A=C(BA)$ から写像の**結合法則** $(f_C\circ f_B)\circ f_A=f_C\circ(f_B\circ f_A)$ が成り立つことが確かめられます．

これらの性質を抽象化して「射」が定義されます．

4. 圏

集合 S に対し，べき集合 2^S を与える対応は，どこからどこへの対応と思えばよいのでしょうか．文献 1) により定式化された圏と関手の言葉では，「集合の圏から集合の圏への関手」として述べることができます．集合の集まり，すなわち**集合の圏**では，集合を「対象」と呼び，写像を「射」と呼びます．まず圏を定義してから，説明を加えます．

定義　**圏**とは，次の 3 つが定まっており：

(a) ある**対象**の範囲，

(b) 任意の 2 つの対象 X,Y に対し，**射**の集合 $\mathrm{Hom}(X,Y)$,

(c) 任意の 3 つの対象 X,Y,Z に対し，**合成**と呼ばれる写像 $\circ:\mathrm{Hom}(X,Y)\times\mathrm{Hom}(Y,Z)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$（$f,g$ の合成を $g\circ f$ と書く）．

次の 3 条件を満たすものを言う．

(1) 射 f に対し $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ となる対象 X,Y は一つに決まっている．

(2) 各対象 X に対し，ある射 $1_X\in\mathrm{Hom}(X,X)$ が存在して，任意の $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ に対して $f\circ 1_X=f$，任意の $g\in\mathrm{Hom}(Y,X)$ に対して $1_X\circ g=g$ を満たす．

(3) 合成は $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$ を満たす．

(a)「対象の範囲が定まっている」ということを少し詳しく説明しましょう．例えば「自然数 1, 2, 3 を対象とする」のように，要素の列挙によって対象を定める方法があります．しかし，これだけでは不便なので，ある条件を満たせば対象とする，という定め方もあります．例えば，**群**の公理は，「集合であり，2 項演算が定まっていて，結合法則を満たし，単位元が存在し，任意の元の逆元が存在する」というものです．群の公理を満たせば，**群の圏**の対象とします（射は群準同型です）．ただ，この形で定めるとラッセルの逆理のように「対象の全体」を考えることが論理的に難しくなるので，厳密には，必要な集合をすべて含んだ集

合である**普遍集合**（universe）[2,5]や，集合よりレベルが１つ上の**類**（class）といった概念を用います．集合の全体は集合にはなりませんが類になります．類の全体は類にならずまた上位の概念（コングロマリット）になる，という階層構造があります．ただ，圏を用いる利点の一つが，むしろそういうものを意識しないでよい，正当化できるけれども興味の中心はそこにはない，ということであると思うので，ここでは深入りしません．

(b) 圏はとても自由度が高く，「対象」は集合と限らず，「射」も写像とは限りません．例えば自然数を対象として，大小関係 $m \leq n$ を m から n への射と思っても圏になります．

なお (a) の注意にあるように，対象の全体や射の全体は集合になるとは限りませんが，対象 X, Y を固定すると，$\mathrm{Hom}(X, Y)$ は集合であるとします．それで集合論を用いて議論できます．

(c) 射を矢印で表した有向グラフを，その圏における**図式**と言います．射の合成を図式で表すと図１のようになります．

条件 (1) について，例えば関数 $f(x) = x^2$ を例にとって説明しましょう．f は $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像と思うこともできますが，値域は 0 以上の実数の集合 $\boldsymbol{R}_{\geq 0}$ ですから，$\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}_{\geq 0}$ への写像とも思えます．あるいはまた，複素数の全体 $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への写像も表せますが，これらをすべて区別します．つまり，どこ（**始域**）からどこ（**終域**）への写像であるかを指定することで，集合の圏の射としては３つとも異なる，と決めるのです．集合の場合，始域は定義域とも呼ばれます．対象は射の合成規則を定めるための添え字の働きをします．

条件 (2) は，合成可能な範囲で合成の単位元に相当するものが存在する，ということです．1_X を X の**恒等射**と呼びます．

条件 (3) は合成の結合法則です．

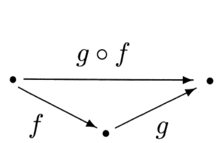


図１　射の合成．

> **定義**　射 $f: X \to Y$ が**同型**であるとは，ある $g: Y \to X$ が存在して，$g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$ を満たすことを言う．このとき X と Y は同型であると言う．g を f の**逆射**と言い f^{-1} で表す．

有限次元実ベクトル空間の圏 (mod-$\boldsymbol{R}$) では，任意の対象は基底によりある $\boldsymbol{R}^n$ と同型です．

同型な対象は，射の振舞いが全く同じになるので，圏では本質的に「同じ」とみなします．

5. 様々な圏

$\mathscr{C}$ を圏とするとき，形式的に射の始域と終域を入れ替えて向きを一斉に逆にしても，合成の順序を逆にすれば圏の公理を満たします．これを $\mathscr{C}$ の**双対圏**と呼び，$\mathscr{C}^\circ$, $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ などで表します．

図式は，矢印の向きにたどって射を合成したとき，始点と終点が決まれば経路によらず同じ射になるとき，**可換図式**と言います．図１は可換図式です．圏 $\mathscr{C}$ の射を対象と思い，f から g への射を $v \circ f = g \circ u$ なる四角形の可換図式とすることで，$\mathscr{C}$ の射の圏 $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ ができます．

３節の数ベクトル空間を対象とする圏のように，対象の全体が集合になる圏を**小さい圏**と呼びます．１つの集合が，要素の間に矢印もついて圏になっているものです．このとき射の全体も集合になります．典型的な例として，対象が１点からなる圏で，射が同型射のみからなるものを与えることは，群を与えることと等価です．一般に，対象が１点からなる圏は**モノイド**と呼ばれます．また，射が同型のみからなる圏は**亜群**（groupoid）と呼ばれます．亜群はモジュライ空間の構成に使われ，代表的なものに，空間を群作用で割るときに，各点の固定部分群を亜群として覚えておくことでよい性質を確保する**スタック**があります．

圏に，被覆の抽象化である**グロタンディック**（Grothendieck）位相が定まっているとき，**サイト**と呼びます．サイトの上ではあたかも位相空間のように層が定義できます．層の全体は**トポス**と呼ばれる圏になります．

6. 関手

圏の間の写像に相当するものを関手と呼びます．

例えば，ベクトル空間を，加法とスカラー倍の構造を忘れて単に集合と思い，線形写像を，集合としての写像と思うことを，ベクトル空間の圏から集合の圏への**忘却関手**と言います．逆に，集合に対し，要素を基底とするベクトル空間を考えることを，**自由（生成）関手**と言います．

定義 2 つの圏 $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ の間に，$\mathscr{C}$ の対象 X を $\mathscr{C}'$ の対象 $F(X)$ に，$\mathscr{C}$ の射 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ を $\mathscr{C}'$ の射 $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ に移す対応 F があり，次の条件を満たすとき，F を（共変）**関手**と言う（図 2）．

(1) $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

(2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$F(f) \in \mathrm{Hom}(F(Y), F(X))$ とし条件 (2) の右辺を $F(f) \circ F(g)$ としたものを**反変関手**と言う（図 3）．

テンソルの共変・反変を思い出します．ベクトルの基底変換 $(\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)P$ に対し，座標の列ベクトル ${}^t(x^1, \cdots, x^n)$ は（左から）逆行列 P^{-1} を掛けて変換するので反変ベクトルと呼ばれます．基底の変換行列が PQ のとき，座標の変換行列は $Q^{-1}P^{-1}$ と順序が逆になります．

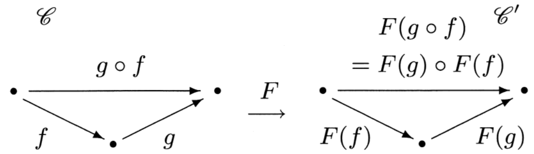


図 2　共変関手.

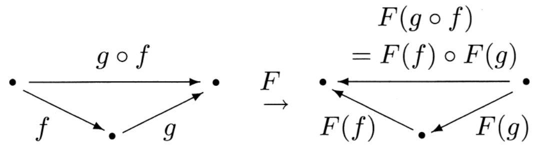


図 3　反変関手.

7. 圏同値

2 つの圏が「同じ」というときには注意が必要です．対象・射の間に 1 対 1 対応を引き起こす関手があるという「同型」は強すぎます．だいたい，私の 1 とあなたの 1 とは同じかどうかに触れないのですから，すべての対象を把握して区別することなどできっこありません．

そこで，2 つの圏 $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ は，「それぞれの対象を同型な対象にうまく取り替えることに目をつぶれば」同型という条件に弱めて，これを満たすとき**同値**であると言います．この圏同値が，圏が本質的に「同じ」というときに使われます．図 4（各対象に恒等射がありますが省略しています）で，左の 2 つの圏は同値ですが，他は同値ではありません．e は同型でない対象の個数（ただし内部対称性で割る）です．

圏同値として，双対圏の例を挙げましょう．$\boldsymbol{Z}$ の（ユニタリ）指標群は $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ であり，$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の（連続）指標群は $\boldsymbol{Z}$ です．これを一般化した結果は「可換群の圏の双対圏と可換コンパクト位相群の圏が同値である」と簡潔に述べられます（**ポントリャーギン**（Pontrjagin）**の双対定理**）．

次は圏同値を用いて対象の同値を定める例です．体 k 上の n 次行列の環 $M_n(k)$ に対し，任意の（左）線形表現は，ある（無限かもしれない）r に対し，$n \times r$ 行列全体と同型になり，表現の圏は n によらず同値です．このように，環 A, B に対し，左 A 加群の圏と左 B 加群の圏が同値となるとき，A と B は**森田同値**であると言います．

緩い圏同値とも見える重要な概念として，忘却関手と自由生成関手の間には**随伴関手**の関係（線形写像は基底の像で決まる）があり，極限・普遍写像性質・表現可能性などと関係します[6)]．

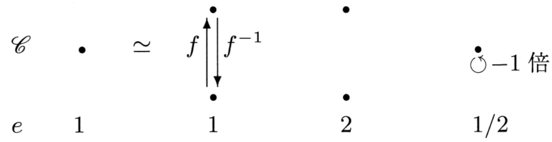


図 4　圏同値.

8. n 圏

集合を対象，写像を射とすると圏ができたように，(小さい) 圏を対象とし，関手を射とすることで，圏ができます．これは 2 圏です．合成には，関手の合成と，関手の射（**自然変換**）の合成の 2 通りがあり，それらの可換性が要求されます．

2 圏の間の「2 関手」から 3 圏が，一般に n 圏や ∞ 圏が考えられます．ホモトピー理論ではこのような高次の関係が登場します．例として，あるシンプレクティック多様体のラグランジアン部分多様体を対象とする**深谷圏**があります．

圏 $\mathscr{C}$ の対象 X から，$\mathscr{C}$ から集合の圏 (Sets) への反変関手 $Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)$ ができます．これにより $\mathscr{C}$ は $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}^\circ, (\mathrm{Sets}))$ の一部とみなせることが示されます (**米田の埋め込み**)．これを用いて，欲しい対象をまず関手として与え，次にそれが元の圏 $\mathscr{C}$ の対象として表現可能かを問う，という二段構えで存在問題を解くことがあります．

9. アーベル圏

アーベル群の圏を抽象化して，**加法圏**や，さらに任意の射に核と余核が存在し準同型定理を満たす**アーベル圏**[3] が定義されます．アーベル圏では，完全系列やコホモロジーを扱うことができます．加法圏・アーベル圏の構造を保つ関手として，加法的関手・完全関手が定まります．

超弦理論で，開弦の住む空間（時空）で，ある部分空間に弦の端点が束縛される，という状況が起こります．弦の端点にはベクトル場が載っており，ベクトル場の全体はベクトル束と呼ばれるものになります．部分空間の上の有限階数ベクトル束（やそれらを集めたもの）は**連接層**と呼ばれます．ある空間上の連接層の全体はアーベル圏をなし，取り扱いやすいのですが，違う空間に連接層を移すだけで情報が失われてしまいます．そこで高次のコホモロジーとして情報を保持するものが，D ブレインの数学的対応物である導来圏です．

10. 導来圏

導来圏は，複体やコホモロジーを使うためさらに難しくなりますが，良く使われるので説明します．他の論説や文献 4, 7) もご覧ください．

アーベル圏 $\mathscr{A}$ の対象（アーベル群や連接層を思い浮かべてください）が一列に射でつながった図式

$$\cdots \to \mathscr{F}^{-1} \to \mathscr{F}^0 \to \mathscr{F}^1 \to \mathscr{F}^2 \to \cdots$$

を考えます．ただし，$\to$ を 2 つたどると 0 になるとします．これを $\mathscr{A}$ の（余鎖）**複体**と呼びます．$\mathscr{A}$ の対象 $\mathscr{F}$ は次の複体と同一視されます．

$$\cdots \to \quad 0 \quad \to \quad \mathscr{F} \quad \to \quad 0 \quad \to \quad 0 \quad \to \cdots$$

この複体から 0 次コホモロジーとして $\mathscr{F}$ が回復されます．$\mathscr{A}$ の複体は鎖写像を射として再びアーベル圏になります．これを $\mathscr{A}$ の**複体の圏**と言い，$C(\mathscr{A})$ と書きましょう．$\mathscr{A}$ は $C(\mathscr{A})$ に埋め込まれています．鎖写像は各次数のコホモロジーの間の射を導きます．大雑把には，複体の各次数のコホモロジーの情報のみを抽出したのが導来圏なのですが，次のように構成されます．

鎖ホモトピー同値な鎖写像がコホモロジーの間に導く射は同じです．そこで $C(\mathscr{A})$ に対し，対象はそのままで，射を鎖ホモトピー同値による商集合に取り換えた圏 $K(\mathscr{A})$ を考えます．$K(\mathscr{A})$ は加法圏になり，$\mathscr{A}$ の**ホモトピー圏**と呼ばれます．

複体の鎖写像は，各次数のコホモロジーの同型を導くとき**擬同型** (quasi-isomorphism) であると言います．$K(\mathscr{A})$ において，擬同型射は必ずしも逆射が存在するとは限りません．そこで，逆射（およびそれらから合成で生成される射）を形式的に付け加えることにします．この操作は**局所化**と呼ばれます．正則関数 $f(x), g(x)$ に対し，商 $f(x)/g(x)$ が正則関数になるためには，分母 $g(x)$ が 0 にならない部分空間に定義域を制限すればよいからこの名前があります．

こうして，対象は $C(\mathscr{A})$ と同じですが，射は異なる（同値類をとり局所化した）加法圏 $D(\mathscr{A})$ ができます．$D(\mathscr{A})$ を $\mathscr{A}$ の**導来圏** (derived category) と呼びます．

11. 導来圏同値

導来圏には項を左に一つずらす関手とコホモロジーの長完全系列に対応する完全三角形（distinguished triangle）があり，**三角圏**と呼ばれる加法圏になります．導来圏の同値は，三角圏の構造を保つ圏同値に限って考えます．

X を複素多様体や代数多様体とするとき，X 上の連接層の（有界）複体を $\mathscr{A}$ としたときの導来圏 $D(\mathscr{A})$ を X の導来圏と言います．

射影複素多様体に対しては，ある意味で曲がっている（標準束が豊富あるいは反豊富な）ときには，導来圏が同値ならば多様体が同型になります（ボンダル（Bondal）＝オルロフ（Orlov））．また，射影複素多様体の導来圏の同値は，**フーリエ（Fourier）＝向井変換**という積分関手に書けます（オルロフ）．つまり，曲がっている空間は導来圏で決まってしまい，平ら（標準束が自明）な空間は別の空間でも導来圏が同値になることがあるが同値を具体的に書き表せる，というわけです．

標準束が自明な部分は群の表現論とも相性がよく，ブリッジランド（Bridgeland）＝キング（King）＝リード（Reid）は，標準束を保つ有限群の作用で作られる複素 3 次元の orbifold（商特異点）は，標準束を変えない特異点解消をもつ，という結果を，具体的に特異点解消することなく，導来圏の言葉で一気に示しました．$\boldsymbol{C}^3$ の同変導来圏と，商空間の標準束を変えない特異点解消の導来圏との同値（**マッカイ（McKay）対応**）も示しています．

複素多様体，とくにカラビ（Calabi）＝ヤウ（Yau）多様体の導来圏が，別のカラビ＝ヤウ多様体の導来深谷圏と同値であろうというのが，コンツェビッチ（Kontsevich）による**ホモロジー的ミラー対称性**予想です．楕円曲線や 4 次 $K3$ 曲面などで確かめられています．導来圏から幾何に戻る方向では，導来圏の安定性条件の集合に複素多様体の構造が入り（ブリッジランド），ほぼ複素化ケーラー（Kähler）類のモジュライ空間に対応すると期待されています．

12. おわりに

自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ は，有限集合の要素の個数を表します．集合の圏で，対象を有限集合に限った部分圏を有限集合の圏 (sets) と呼ぶことにします．要素の個数が等しければ 1 対 1 対応ができて，集合として対等（同型）ですから，対象の同型類が要素の個数により自然数に対応する，というようになっています．(sets) は $\boldsymbol{N}$ の**圏化**（categorification）であると言われます．(mod-$\boldsymbol{R}$) でも対象の次元は自然数になり，次元が等しいことと同型であることが同値です．(mod-$\boldsymbol{R}$) も $\boldsymbol{N}$ の圏化であると言います．

観測対象の全体が，観測値集合の圏化であるとも言えるでしょう．

圏の考え方は，イデア的な存在を仮定せずに関係を記述するので，観測データを生み出す実体のモデルとして適しているとは思えないでしょうか．

果たして，素粒子の究極理論を生み出す圏はあるのでしょうか？

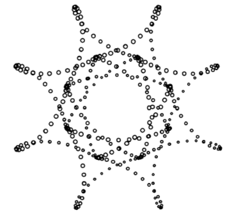
参考文献

1) S. Eilenberg, S. Mac Lane, General theory of natural equivalence, *Trans. Amer. Math. Soc.* **58** (1945) 231–294.
2) A. Grothendieck *et al.*, *Séminaire de Géométrie Algébrique* (SGA).
3) A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku J. Math.* **9** (1957) 119–221.
4) S.I. Gel'fand, Yu. I. Manin, Methods of Homological Algebra, 2nd ed., *Springer Monographs in Mathematics*, Springer, 2003.
5) M. Kashiwara, P. Shapira, Categories and Sheaves, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Vol. **332**, Springer–Verlag, 2005.
6) S. Mac Lane, Categories for the working mathematician, second edition, *Graduate Texts in Mathematics* **5**, Springer–Verlag, 1998.
7) R. Hartshorne, Residues and Duality, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **20**, Springer–Verlag, 1966.
8) C.A. Weibel, An introduction to homological algebra, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **38**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

（こばやし・まさのり，首都大学東京大学院理工学研究科）

層

現代数学における「図形」



橋本　義武

1. 関数概念

関数（function）とは何だろうか？ この問いはニュートン，ライプニッツ以降の数学の歴史の中で繰り返し問われてきた．**層**（sheaf）の概念も，そのような営みの中から生まれたものである．

「関数とは集合の間の写像のことであって，それ以上でもそれ以下でもない」というのが一つの明快な答であろう．このような見方は大学の数学で最初に習うことであり，そのように割り切って扱うことの利点は小さくない．

しかし，例えばフーリエ解析においては関数とは「cos, sin の重ね合わせ」であり，複素関数論においては正則関数とはべき級数という「式」であって，いずれも写像という解釈には収まらないものがある．

20 世紀になり，量子力学の影響もあって，「**一つ一つの関数ではなく関数たちのなすベクトル空間のほうに着目する**」という考え方が現れた．層や関数解析（位相ベクトル空間）のアイデアもそのような時代精神の中で生まれている．関数たちは自分が関数であったことを忘れて抽象的なベクトル空間の中のベクトルになってしまうわけだが，忘れることの代償としてベクトル空間たちが獲得したプラスアルファの構造が主役に躍り出る．層の場合は**関手性**，関数解析の場合は位相や双対性がそれに当たる．

以下の話では，集合と写像，位相，線型代数，複素解析などについての基本的な事項を少し仮定することをお許しいただきたい．

2. 層の定義

2.1 正則関数の芽

初めに述べたように，正則関数には，複素数に複素数を対応させる写像としての顔と，収束べき級数という式としての顔がある．まずはそのあたりから話を始めることにしよう．

複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ とする．点 $z_0 \in \mathbb{C}$ に対し，複素係数のべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ で収束半径が正であるもの全体の集合を $\mathcal{O}_{z_0}$ とする．

$\mathcal{O}_{z_0}$ は複素ベクトル空間をなし，その元は z_0 を含む**ある**開集合上の正則関数を与える．$\mathcal{O}_{z_0}$ の元を点 z_0 における正則関数の**芽**と言う．それが「育って」どこかの開集合上の正則関数になる，という感じだろうか．

では，これをどの開集合上の関数と考えるのが一番よいのだろうか．定義域をできるだけ大きくとりたいのが人情だが，最大の定義域は $\mathbb{C}$ 上に必ずしも存在しない．

例えば，$f(z)=\sqrt{z}$ は，符号を $f(1)=1$ で決めて $z=1$ でべき級数展開することができるが，これを 2 つの開集合

$$U_{\pm}=\{x+iy \mid x \neq 0,\ \text{または}\ \pm y>0\}$$

それぞれの上の正則関数に拡張したものを f_+, f_-

とすると，これらは $U_+ \cap U_-$ のうち $x<0$ の部分で一致しないので，$U_+ \cup U_- = \mathbb{C} - \{0\}$ 上の正則関数には拡張できない．

そこで，$\mathcal{O}_{z_0}$ の元に対して最大の定義域を１つ決めることはあきらめて，z_0 を含む開集合上の正則関数への拡張を**すべて**考えることにする．すなわち，$\mathbb{C}$ のすべての開集合と，その上の正則関数全体の集合を**一挙に**考えてみよう．（もう一つ，$\sqrt{z}$ の定義域として，U_+, U_- の $x>0$ の部分だけ貼り合わせて，$x<0$ の部分は貼らないでおいたものを考える，というアイデアもある．実はこのアイデアの行き着く先も層の概念である．）

2.2 正則関数を各開集合ごとに考える

$\mathbb{C}$ の開集合 U に対し，U 上の正則関数全体のなす複素ベクトル空間を $\mathcal{O}(U)$ とおく．さらに $\mathbb{C}$ の開集合 $U \subset V$ に対し，関数の制限によって，線型写像

$$\rho_U^V : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U), \quad f \longmapsto f|U$$

を定める．

このベクトル空間の族と線型写像の族の組 $(\{\mathcal{O}(U)\}, \{\rho_U^V\})$ に対し，次が成り立つ．

(P1) $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{O}(U)}$ （恒等写像），

(P2) $\rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W \quad (U \subset V \subset W)$.

さらに，開集合 U と開被覆 $U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ に対し，

(S1) $(\rho_{U_\lambda}^U)_{\lambda\in\Lambda} : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}(U_\lambda)$ は単射で，

(S2) 像は $\{(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid \rho_{U_{\lambda\mu}}^{U_\lambda}(f_\lambda) = \rho_{U_{\lambda\mu}}^{U_\mu}(f_\mu)\}$ に一致する．ただし $U_{\lambda\mu} = U_\lambda \cap U_\mu$.

(S2) は，U の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に関する局所的な関数のデータが，「共通部分で一致する」という**貼り合わせの条件**をみたしているならば，それは U 全体の関数を表している，ということを言っている（図 1）．

以上，添え字が多くて見づらいかもしれないが，やっていることはいたって簡単で，正則関数をいろいろな開集合に制限しているだけである．現代数学では，アイデアが単純であるほど記号はごちゃごちゃするもののようだ．

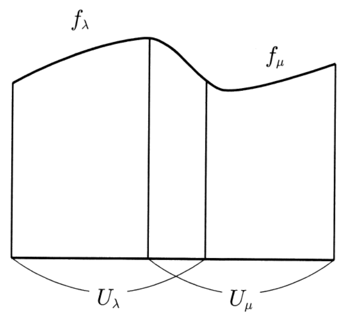


図 1 関数の張り合わせ．

2.3 前層と層の定義

重要な例の性質を列挙し，これを公理として仕切り直すことにして概念に名をつける．現代数学の営みはこの作業の積み重ねであり，今おこなっている考察も例外ではない．

一般に，位相空間 X の開集合 U に対する複素ベクトル空間の族 $\{\mathcal{F}(U)\}$ と，開集合の対 $U \subset V$ に対する線型写像の族 $\{\rho_U^V = (\rho_\mathcal{F})_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)\}$ の組が，条件 (P1)(P2) をみたすとき，$\mathcal{F} = (\{\mathcal{F}(U)\}, \{(\rho_\mathcal{F})_U^V\})$ を X 上の複素ベクトル空間の**前層** (presheaf) と言い，さらに (S1)(S2) が成り立つとき，**層**と言う．（ただし，条件の中の $\mathcal{O}$ は $\mathcal{F}$ に読みかえる．）

前層を与えるとき，$\mathcal{F}(U)$ を定義すれば，ρ_U^V のほうはだいたいどうやるか見当がつくのでしばしば説明を省く．

$\mathcal{F}(U)$ の元を $\mathcal{F}$ の U 上の**切断** (section) と言う．X 上の切断は特に**大域切断** (global section) と言う．

X 上の複素ベクトル空間の前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ に対し，射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは，開集合 U に対する線型写像の族 $\{\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\}$ で，開集合 $U \subset V$ に対して $\varphi_U \circ (\rho_\mathcal{F})_U^V = (\rho_\mathcal{G})_U^V \circ \varphi_V$ が成り立つもののことを言う．このとき，射の合成，恒等射，同型の概念も自然に定義される．層の間の射は，前層としての射のこととする．

同様にして，集合の層，アーベル群の層，環上の加群の層なども定義される．

3. 層の例

3.1 順像

連続写像 $f : X \to Y$ および X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し，Y 上の層 $f_*\mathcal{F}$ を次のように定義する：Y の開集合 V に対し，$f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ とおく．

$f_*\mathcal{F}$ を f による $\mathcal{F}$ の**順像**と言う．

3.2 定数層

位相空間 X の開集合 U に対し，関数 $f : U \to \mathbb{C}$ で任意の $c \in \mathbb{C}$ に対し $f^{-1}(c)$ が開集合であるようなもの全体のなす複素ベクトル空間を $\mathbb{C}_X(U)$ とする．

$\mathbb{C}_X$ は複素ベクトル空間の層になる．これを X の**定数層**と言う．

3.3 複素多様体上の層

(1) 複素多様体 X の開集合 U に対し，U 上の正則関数全体のなす複素ベクトル空間を $\mathcal{O}_X(U)$ とする．

$\mathcal{O}_X$ は複素ベクトル空間の層になる．これを X の**構造層**と言う．

(2) 複素多様体 X の部分多様体 S に対し，S の構造層 $\mathcal{O}_S$ の包含写像 i による順像 $i_*\mathcal{O}_S$ は X 上の複素ベクトル空間の層である．

(3) 複素多様体 X 上の階数 n の正則ベクトル束 $E \to X$，および X の開集合 U に対し，U 上の E の正則切断全体のなす複素ベクトル空間を $\mathcal{E}(U)$ とする．

$\mathcal{E}$ は複素ベクトル空間の層になる．さらに X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して，各 $\mathcal{E}(U_\lambda)$ は $\mathcal{O}_X(U_\lambda)^{\oplus n}$ に同型になる．$\mathcal{E}$ を**局所自由層**と呼ぶ．

X の開集合 U に対し，$i_*\mathcal{O}_S(U), \mathcal{E}(U)$ は可換環 $\mathcal{O}_X(U)$ 上の加群になり，作用は ρ_U^V と可換である．このようなとき，$i_*\mathcal{O}_S, \mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_X$ **加群**であると言う．このように，部分多様体やベクトル束のような血の通った幾何学的対象を $\mathcal{O}_X$ 加群として扱うことができる．

わたしたちは子どものころから「図形」というものに親しんでいるが,「図形」という言葉の正式な定義があるわけではない．何か定義を決めてしまうと,「図形」という言葉のもっている広がりを制限してしまうからだ．層の言葉は，この広がりをかなりいい線まで表現してくれる．

3.4 代数多様体上の層

複素係数 n 変数多項式 $f_1, \cdots, f_k$ に対し，その共通零点集合

$$X = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0\}$$

を代数的集合と呼び，そのうち既約なもの，すなわち 2 つの代数的集合の非自明な和にならないものを $\mathbb{C}$ 上の**アフィン代数多様体**と言う．

アフィン代数多様体 X の上では，$z_1, \cdots, z_n$ の有理式で書ける関数のみを考えることにしよう．このとき開集合のほうも，そのような関数にぴったりの定義域となるものだけを考えれば十分である．このように弱めた X 上の位相を**ザリスキー位相**と言う．

一般の代数多様体は，有理式で書ける座標変換でアフィン代数多様体たちを貼り合わせて作る．この枠組みで，構造層 $\mathcal{O}_X$ や $\mathcal{O}_X$ 加群を定義することができる．

4. 前層を砕いて層に作り直す

4.1 層の理論の要

層というのは「関数をいろいろな開集合に制限する」という操作を抽象化しただけの話なので，そんな当り前のことをやっていて何か面白いことがわかるのだろうか？ というのは当然の疑問である．これに答えるため，層の話がどの辺から当り前でなくなってくるのかを見ていこう．

位相空間 X 上の複素ベクトル空間の層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ および射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を考える．X の開集合 U に対し，

$$(\mathrm{Ker}\,\varphi)(U) = \mathrm{Ker}\,(\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)),$$
$$(\mathrm{Coker}^*\varphi)(U) = \mathcal{G}(U)/\varphi_U(\mathcal{F}(U))$$

とおく．このとき $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は層になり，これを φ の核と言う．一方，$\mathrm{Coker}^*\varphi$ **は前層ではあるが，一般には (S2) をみたさず，層にならない．**同値類に

おいて貼り合わせの条件がみたされていても，代表元の貼り合わせの条件は出てこないからである．

そこで，**前層 Coker$^*\varphi$ を層に作り直す．**この辺が層の理論の要である．どうやるかと言うと，初心に帰って関数の**芽**という概念に着目するのである．

4.2 例

$X=\mathbb{C}^2$ とし，(z_1, z_2) を $\mathbb{C}^2$ の座標とする．X 上の複素ベクトル空間の層 $\mathcal{O}_X$ を次のように定義する．

X の開集合 U に対し，z_1, z_2 の有理式で U 上有限の値をとるもの全体を $\mathcal{O}_X(U)$ とする．いつものように ρ_U^V は制限である．

射 $\varphi:\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X$ を

$$\varphi_U(f_U)=z_2 f_U,\quad (f_U\in\mathcal{O}_X(U))$$

によって定義するとき，Coker$^*\varphi$ が層にならないことを見よう．

$U_1=\{z_1\neq 0\}, U_2=\{z_2\neq 0\}$ とする．$U_1\cup U_2=\mathbb{C}^2-\{(0,0)\}$ である．

$[1/z_1]\in(\mathrm{Coker}^*\varphi)(U_1)$ と $0\in(\mathrm{Coker}^*\varphi)(U_2)$ とは，$(\mathrm{Coker}^*\varphi)(U_1\cap U_2)=0$ なので貼り合わせの条件をみたす．

よって条件 (S2) がみたされていると仮定すると，$f\in\mathcal{O}_X(U_1\cup U_2)$ があって，

$$\rho_{U_1}^{U_1\cup U_2}([f])=[1/z_1]\in(\mathrm{Coker}^*\varphi)(U_1)$$

となる．よって $U_1\cap\{z_2=0\}$ 上 $f=1/z_1$ となるので，f は X 全体に拡張できない．

一方，代数学の基本定理より，z_1, z_2 の多項式で $(0,0)$ のみを根とするものは存在しないことが言えるので，$\mathcal{O}_X(U_1\cup U_2)$ の元はすべて z_1, z_2 の多項式であり，X 全体に拡張できる．これは矛盾である．

4.3 茎と芽

$\mathcal{F}$ を位相空間 X 上の前層とする．点 $x\in X$ を固定し，これを含む X の開集合 U すべてについての直和集合 $\coprod_{U\ni x}\mathcal{F}(U)$ 上に次のような同値関係 $\sim$ を入れる．すなわち，x を含む開集合 V, W および $s_V\in\mathcal{F}(V)$, $s_W\in\mathcal{F}(W)$ に対し，$s_V\sim s_W$ であるのは，x を含むある開集合 $U\subset V\cap W$ に対して $\rho_U^V(s)=\rho_U^W(s)$ となることとする．商集合 $\mathcal{F}_x$ を x における $\mathcal{F}$ の**茎** (stalk) と言い，その元を**芽** (germ) と言う（図 2）．$\mathcal{F}(U)$ から $\mathcal{F}_x$ への自然な写像を $\rho_x^U=(\rho_{\mathcal{F}})_x^U$ とする．前層の射は，茎の間の線型写像を誘導する．

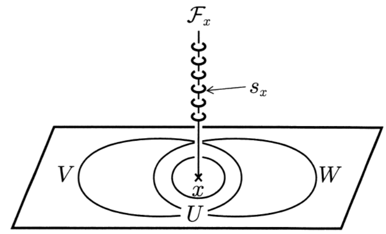


図 2 茎 ($\mathcal{F}_x$) と芽 (s_x) のイメージ．

帰納的極限というものを用いれば，

$$\mathcal{F}_x=\varinjlim\mathcal{F}(U)$$

とあっさり書ける．ただし U は x を含む開集合を動く．帰納的極限は層にとって必須アイテムなのだが，説明すると長くなるのでやめておく．

2.1 節で述べた正則関数の芽も，層 $\mathcal{O}$ からこのようにして得られる．と言うか，そうなるようにいろいろ定義してきたのである．

4.4 層化

引き続き $\mathcal{F}$ を位相空間 X 上の前層とする．

X の開集合 U に対し，$\mathcal{F}^{\mathrm{st}}(U)=\prod_{x\in U}\mathcal{F}_x$ と茎を並べることにより，X 上の層 $\mathcal{F}^{\mathrm{st}}$ が得られ（$\{\rho_U^V\}$ は自然に定義されるもの），$\{(\rho_{\mathcal{F}})_x^U\}$ が射 $\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{\mathrm{st}}$ を誘導する．

$(s_x)_{x\in U}\in\mathcal{F}^{\mathrm{st}}(U)$ のうち，開被覆 $U=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ および $s_\lambda\in\mathcal{F}(U_\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ が存在して，$s_x=\rho_x^{U_\lambda}(s_\lambda)$ $(x\in U_\lambda)$ となるようなもの全体の集合を $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}(U)$ とおくことにより，X 上の層 $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$，および射 $\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}\to\mathcal{F}^{\mathrm{st}}$ が得られる．各点 $x\in X$ 上の茎に誘導される写像 $\mathcal{F}_x\to(\mathcal{F}^{\mathrm{sh}})_x$ は同型である．また，$\mathcal{F}$ が層ならば $\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ は前層の同型である．

層 $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ を前層 $\mathcal{F}$ の**層化**と言う．

層化を次のように作ることもできる．X の開集合 U および U の開被覆 $\mathfrak{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，

切断の族 $(s_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{F}(U_\lambda)$ で，貼り合わせ条件 $\rho^{U_\lambda}_{U_{\lambda\mu}}(s_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_{\lambda\mu}}(s_\mu)$ をみたすもの全体のなす集合を $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ とおく．$\mathfrak{U}$ の細分 $\mathfrak{U}'$ に対し，写像 $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ が誘導される．そこで U のすべての開被覆について帰納的極限をとって，

$$\check{H}^0(U, \mathcal{F}) = \varinjlim \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

とおくと，これは $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}(U)$ と自然に同一視される．

4.5 層の射の余核

最初の状況に戻ると，位相空間 X 上の複素ベクトル空間の層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ および射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し，前層 $\mathrm{Coker}^*\varphi$ の層化を $\mathrm{Coker}\,\varphi$ と書き，φ の余核と呼ぶ．このとき，各点 $x \in X$ において，自然な線型写像 $\mathcal{G}_x/\varphi_x(\mathcal{F}_x) \to (\mathrm{Coker}\,\varphi)_x$ は同型になる．アーベル群の層，環上の加群の層に対しても同様のことができる．

これでめでたしめでたしと言いたいところだが，今度は X の開集合 U に対し，自然な線型写像 $\mathcal{G}(U) \to (\mathrm{Coker}\,\varphi)(U)$ が一般には全射にならないということが気になる．この線型写像の余核はどうなっているのだろうか？ この問いに答えるのが**層係数のコホモロジー群**である．

圏の言葉を用いると，余核が定義できたことにより，複素ベクトル空間の層の圏は**アーベル圏**（アーベル群の圏の性質を列挙して公理化した概念）になる．この事実によって，層の理論において**ホモロジー代数**，中でも**導来関手**や**スペクトル系列**という強力な道具が駆使できるようになる．さらには層の圏の**導来圏**を考える，という近年すっかりおなじみになった考え方（グロタンディークや佐藤幹夫が最初から言っていたこと）へと導かれるのである．

5. 層係数のコホモロジー群

5.1 層の完全列

位相空間 X 上の複素ベクトル空間の層の射の列 $\mathcal{F} \xrightarrow[\varphi]{} \mathcal{G} \xrightarrow[\psi]{} \mathcal{H}$ が**完全**であるとは，各点 $x \in X$ において茎に誘導される線型写像の列 $\mathcal{F}_x \xrightarrow[\varphi_x]{} \mathcal{G}_x \xrightarrow[\psi_x]{} \mathcal{H}_x$ が完全であること，すなわち φ_x の像が ψ_x の核に一致することを言う．これは，X の開集合 U に対して，$\mathcal{F}(U) \xrightarrow[\varphi_U]{} \mathcal{G}(U) \xrightarrow[\psi_U]{} \mathcal{H}(U)$ が完全であることを意味しないが，$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow[\varphi]{} \mathcal{G} \xrightarrow[\psi]{} \mathcal{H}$ が完全ならば，$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow[\varphi_U]{} \mathcal{G}(U) \xrightarrow[\psi_U]{} \mathcal{H}(U)$ も完全である．

5.2 層のコホモロジーの公理

位相空間 X 上の複素ベクトル空間の層の**コホモロジー**とは，次の3つの対応の組のことである．

(1) X 上の複素ベクトル空間の層 $\mathcal{F}$ に対し，複素ベクトル空間の列

$$H^i(\mathcal{F}) = H^i(X, \mathcal{F}), \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

を対応させる．これを層 $\mathcal{F}$ を係数とする i 次コホモロジー群と言う．ただし，

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X).$$

(2) 層の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し，線型写像の列

$$H^i(\varphi) : H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{G})$$

$(i = 0, 1, 2, \cdots)$ を対応させる．ただし，これは恒等射 $\mathrm{id}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ には恒等写像の列を対応させ，$\mathcal{F} \xrightarrow[\varphi]{} \mathcal{G} \xrightarrow[\psi]{} \mathcal{H}$ に対し，

$$H^i(\psi \circ \varphi) = H^i(\psi) \circ H^i(\varphi).$$

(3) 層の完全列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ に対し，線型写像の列

$$\delta^i : H^i(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{F}),$$

$(i = 0, 1, 2, \cdots)$ を対応させる．ただし，

$$\begin{array}{cl} 0 \ \to & H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{G}) \to H^0(\mathcal{H}) \\ \underset{\delta^0}{\to} & H^1(\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{G}) \to H^1(\mathcal{H}) \to \cdots \\ \underset{\delta^{i-1}}{\to} & H^i(\mathcal{F}) \to H^i(\mathcal{G}) \to H^i(\mathcal{H}) \\ \underset{\delta^i}{\to} & H^{i+1}(\mathcal{F}) \to H^{i+1}(\mathcal{G}) \to \cdots \end{array}$$

は完全列であり，また行が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{G} & \to & \mathcal{H} & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{G}' & \to & \mathcal{H}' & \to 0 \end{array}$$

に対し，誘導される図式

$$\begin{array}{ccc} H^i(X,\mathcal{H}) & \underset{\delta^i}{\longrightarrow} & H^{i+1}(X,\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(X,\mathcal{H}') & \underset{\delta^i}{\longrightarrow} & H^{i+1}(X,\mathcal{F}') \end{array}$$

は可換である．

5.3 層のコホモロジーの構成

(1) 位相空間 X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し，複素ベクトル空間 $H^i(X,\mathcal{F})$ は次のように与えればよい．

まず $H^0(X,\mathcal{F})=\mathcal{F}(X)$ と定義する．

次に 3.4 節で定義した層の射 $\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{\mathrm{st}}$ の余核を $\mathcal{F}^+$ とし，$H^1(X,\mathcal{F})$ を線型写像 $\mathcal{F}^{\mathrm{st}}(X)\to\mathcal{F}^+(X)$ の余核と定義する．

以下帰納的に，

$$H^i(X,\mathcal{F})=H^{i-1}(X,\mathcal{F}^+),\quad (i\geq 2)$$

と定義する．

(2) 層の射に対応する線型写像 $H^i(\varphi)$ も自然に定義される．

(3) δ^i は，$i=0$ の場合に構成できれば，以下帰納的に与えられる．δ^0 は可換図式を追って得られるが，スペースを食うので説明は省略する．

5.4 チェック・コホモロジー

位相空間 X 上の層 $\mathcal{F}$ と X の開被覆 $\mathfrak{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，非負整数 i に対し，i **次チェック・コホモロジー群** $\check{H}^i(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ を次のように定義する．

$$U_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_q}=U_{\lambda_0}\cap U_{\lambda_1}\cap\cdots\cap U_{\lambda_q}$$

とおくと，q **コチェイン**とは，

$$(s_{\lambda_0\ldots\lambda_q})\in\prod_{(\lambda_0,\ldots,\lambda_q)}\mathcal{F}(U_{\lambda_0\ldots\lambda_q})$$

であって，2 つの添え字を入れ替えると -1 倍になるもののこと．q コチェイン全体のなす複素ベクトル空間を $\check{C}^q(\mathcal{F})$ とする．

次に，線型写像 $\check{\delta}^q:\check{C}^q(\mathcal{F})\longrightarrow\check{C}^{q+1}(\mathcal{F})$ を，

$$(\check{\delta}^q s)_{\lambda_0\ldots\lambda_{q+1}}=\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\rho_U^{V_j}(s_{\lambda_0\ldots\widehat{\lambda_j}\ldots\lambda_{q+1}}),$$

$$U=U_{\lambda_0\ldots\lambda_{q+1}},\quad V_j=U_{\lambda_0\ldots\widehat{\lambda_j}\ldots\lambda_{q+1}}$$

によって定義する．$\hat{}$ はその添え字を除くという意味．

このとき，$\check{\delta}^q\circ\check{\delta}^{q-1}=0$．そこで，

$$\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})=\mathrm{Ker}\,\check{\delta}^0,$$
$$\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})=\mathrm{Ker}\,\check{\delta}^q/\mathrm{Im}\,\check{\delta}^{q-1},\quad (q\geq 1)$$

と定義する．

$\mathfrak{U}$ の細分 $\mathfrak{U}'$ に対し，線型写像 $\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})\to\check{H}^q(\mathfrak{U}',\mathcal{F})$ が誘導される．そこで X のすべての開被覆について帰納的極限をとって，

$$\check{H}^q(X,\mathcal{F})=\varinjlim\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})$$

とおく．例えばユークリッド空間の部分空間になるような X に対して，これは $H^q(X,\mathcal{F})$ に同型である．

また，そのような X に対して，$\check{H}^q(X,\mathbb{C}_X)$ は X の複素係数 q 次特異コホモロジー群とも同型になる．

この事実こそ，実は層の理論のもう一つの出発点であった．位相空間のホモロジー・コホモロジー論において，係数は空間の引き立て役に過ぎなかったが，チェック・コホモロジーを通して係数が層に一般化されると，引き立て役どころか「層こそ空間そのもの」という感じになる．

係数をさらに一般化することもなされていて，層の一般化である**スタック**や**ジェルブ**，**パーバース層**という概念が定義されている．

層係数コホモロジーは，多変数複素解析における種々の存在定理を消滅定理の形に定式化し，代数多様体の不変量を与え，代数群の表現を実現した．

参考文献

1) チェック・コホモロジーやスペクトル系列については，ボット，トゥー著，三村護訳『微分形式と代数トポロジー』シュプリンガー・ジャパン．
2) 複素多様体上の層については，小林昭七著『複素幾何 1』岩波書店．
3) スキーム上の層については，ハーツホーン著，高橋・松下訳『代数幾何学 1, 2』シュプリンガー・ジャパン；上野健爾著『代数幾何 1, 2』岩波書店．
4) 位相空間上の層については，イヴァセン著，前田博信訳『層のコホモロジー』シュプリンガー・ジャパン．

（はしもと・よしたけ，大阪市立大学大学院理学研究科）

ホモロジー群とBrouwerの固定点定理



杉山 健一

1. 動機付け

洗面器に水を入れてかき回すと渦が必ず生じるが，これをトポロジーを用いて証明することができる．その証明は次の節でホモロジーの定義とその基本的な性質を説明したのち行うこととして，ここではこの現象を数学的に厳密に定式化する．洗面器とそこに入っている水を $B^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ と表すことにする．入っている水は $U^2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ により表され，それを入れている洗面器は $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ となる．いま水をかき回して水流を起こし，$P \in B^2$ にある粒子が，時間が δ（ただし δ はとても小さいとする）だけ経過したのちに $P_\delta \in B^2$ に到達したとしよう．このとき，B^2 からそれ自身への連続写像 $B^2 \xrightarrow{f} B^2$ が $f(P) = P_\delta$ により得られるが，$P \in U^2$ が渦の中心ならば，微小時間の経過では動かないから，$f(P) = P$ という性質をもつ（このような点を f の固定点と言う）．また，洗面器は固定されたままなので明らかに

$$f(Q) = Q, \quad Q \in S^1 \tag{1.1}$$

が成り立つ．したがって渦が全くない水流は，B^2 からそれ自身への連続写像で (1.1) を満たし，しかも U^2 内に固定点を持たないものとして定義されることがわかる．この写像について考察をもう少し続けてみよう．P を U^2 内の点とするとき，P を基点とし P と $f(P)$ とを結ぶ半直線は，S^1 とただ一点で交わるが，その交点を $h(P)$ とすることにより，連続写像 $U^2 \xrightarrow{h} S^1$ が得られる．

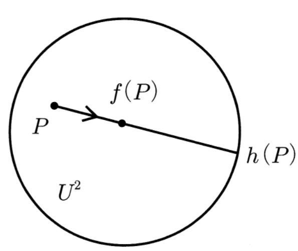


図 1　連続写像 h.

ここで，このような半直線は P と $f(P)$ が異なるからこそ引くことができることに注意してほしい（図 1）．h を洗面器 S^1 に制限したものは恒等写像と定義すると，(1.1) から h は B^2 から S^1 への連続写像に拡張されるが，第 4 節でこのような連続写像は存在しないことを証明する．

2. 2 次元図形のホモロジー群

高次元の場合も本質的には同じなので直観的にわかりやすい 2 次元図形のホモロジー群を解説するが，そのためにまず図形の三角形分割を導入しなければならない．三角形分割とは，その名のとおり図形を三角形に分割することで，例えば 4 面体は球面を 4 つの三角形に分割したものとみなせる（図 2）．

また別の例として，筒とメビウスの帯をそれぞれ三角形に分割してみよう．以下のような矢印に沿って図形を切り開くと，

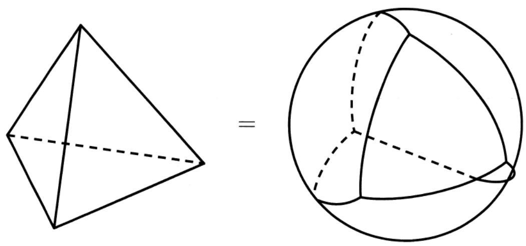
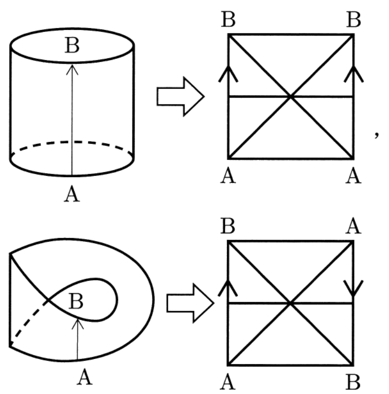
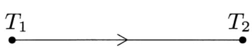
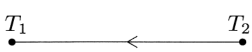


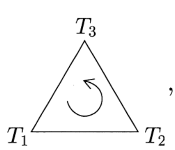
図 2　4 面体と球面の分割.

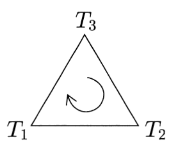


と同じ分割が得られるが，両者の違いは左右の端に現れる矢印の向きで区別されるので，図形の向きという概念を定義しよう．一般に T_1 と T_2 を頂点とする辺に矢印を入れて線分に向きを定め，頂点を矢印に従って並べて

$T_1T_2 =$ ,
$T_2T_1 =$ 

と表す．このとき後者は，前者の矢印の向きを反対にしたものなので $T_2T_1 = -T_1T_2$ と定める．また T_1, T_2, T_3 を頂点とする三角形に矢印を入れて，頂点を矢印の順番に並べて

$T_1T_2T_3 =$ ,

$T_3T_2T_1 =$ 

と表すと，後者の矢印の向きは前者のそれと反対なので $T_3T_2T_1 = -T_1T_2T_3$ と定める．一般に，頂点を置換 σ により入れ替えて得られる三角形 $T_{\sigma(1)}T_{\sigma(2)}T_{\sigma(3)}$ の向きを，置換の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ により定義しよう：$T_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)} = \mathrm{sgn}(\sigma)T_{123}$．するとこの定義は上の考察と両立することがわかる．三角形分割に現れる頂点を 0 次元単体，辺を 1 次元単体，三角形を 2 次元単体と呼ぶことにすると，いずれの三角形分割も次の性質を持つことに注意してほしい：単体 σ と τ の共通部分が空でないならば，それらの共通部分 $\sigma \cap \tau$ も単体である．一般に，0 次元単体（あるいは頂点）と呼ばれる点の集合 K_0，1 次元単体（あるいは辺）と呼ばれる辺の集合 K_1 と 2 次元単体（あるいは面）と呼ばれる三角形の集合 K_2 の合併 K で上記の性質を持つものを 2 次元単体的複体と言い，さらに各単体に向きが定義されているとき，K は向きづけられた 2 次元単体的複体と言う．K に属する単体の合併を $|K|$ により表し，単体的複体 K の実現と言い，K をその単体分割と言う．例えば，以下の図が示すように 4 面体を用いて球面を三角形分割し，各単体に向きを入れることにより向き付けられた 2 次元単体的複体 K が得られるが，逆に球面は K の実現となる（図 3）．

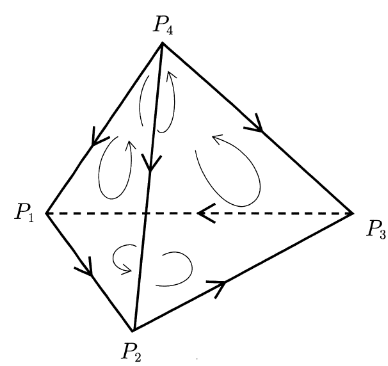


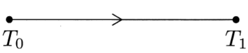
図 3　各単体の向き付け.

つまり単体的複体とは設計図みたいなもので，その設計図に従って図形を組み上げると実現 $|K|$ が得られる．しかし，問題は，設計図が図形に対して一通りに決まらないように，同一の図形から複数の単体的複体が作られることである．（例えば 4 面体や 8 面体から，球面の異なる単体的複体が得られる．）この問題を克服するために，ホモロジー

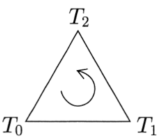
群を導入する．まず，2 次元単体的複体に対して，チェイン複体という線形空間と線形写像の系列を定義する．簡単のため，上述の球面から得られた向き付けられた 2 次元単体的複体 K を例にとって説明しよう．i 次チェイン複体 $C_i(K)$ を，向き付けられた i 次元単体を基底とする実数係数の線形空間として定義する．（一般には，可換環 A を係数とする自由加群として定義されるが，ここでは簡単のため実数上で定義する．）この場合は，

$$\begin{aligned}C_0(K) &= \mathbb{R}P_1 \oplus \mathbb{R}P_2 \oplus \mathbb{R}P_2 \oplus \mathbb{R}P_3 \oplus \mathbb{R}P_4,\\ C_1(K) &= \mathbb{R}P_1P_2 \oplus \mathbb{R}P_2P_3 \oplus \mathbb{R}P_3P_1\\ &\qquad \oplus \mathbb{R}P_4P_1 \oplus \mathbb{R}P_4P_2 \oplus \mathbb{R}P_4P_3,\\ C_2(K) &= \mathbb{R}P_1P_2P_3 \oplus \mathbb{R}P_2P_3P_4\\ &\qquad \oplus \mathbb{R}P_1P_3P_4 \oplus \mathbb{R}P_2P_3P_4\end{aligned}$$

となる．さて，向きのついた辺

$T_0T_1 =$ 

の境界 $\partial(T_0T_1)$ を $\partial(T_0T_1) = T_1 - T_0$ と，また向き付けられた三角形

$T_0T_1T_2 =$ 

の境界 $\partial(T_0T_1T_2)$ を，境界上の各辺に向きを三角形のそれと同調するように入れることにより，$\partial(T_0T_1T_2) = T_0T_1 + T_1T_2 + T_2T_0 = T_1T_2 - T_0T_2 + T_0T_1$ と定義する．これらを線形写像として $C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K)$，あるいは $C_2(K) \xrightarrow{\partial} C_1(K)$ にそれぞれ自然に拡張して，境界準同型写像と呼ぶことにすると $\partial(\partial(T_0T_1T_2)) = 0$ となることが容易に確認できるので，境界準同型写像からなる列：$C_2(K) \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K)$ で

$$\partial \circ \partial = 0 \tag{2.1}$$

を満たすものが得られる．これを K のチェイン複体と言う．しかしながら，チェイン複体そのものが球面の性質を反映するわけではない．その理由は，例えば正 8 面体も球面の三角形分割を与えるが，それを 2 次元単体的複体とみなして構成したチェイン複体は，先ほどの 4 面体を用いたものと大きく異なるからである．つまり，チェイン複体は図形の三角形分割に依存する．そこで分割によらない情報を得るために，次のような工夫をする．i 次元サイクルの空間を $Z_i(K) = \{x \in C_i(K) \mid \partial(x) = 0\}$ により，また i 次元境界の空間を $B_i(K) = \{y \in C_i(K) \mid \partial(x) = y$ を満たす $x \in C_{i-1}(K)$ が存在する$\}$ とそれぞれ定義すると，(2.1) から $B_i(K)$ は $Z_i(K)$ の部分線形空間となることがわかる．そこで K の i 次ホモロジー群をその商空間として定義する：$H_i(K) = Z_i(K)/B_i(K)$．すると，（ここでは証明しないが）ホモロジー群は実現 $|K|$ の分割の取り方によらずに決まることが知られているので，しばしば $H_i(|K|)$ と表される．実際，球面の場合はいかなる分割を用いても，すべての単体的複体 K について $H_2(K) = H_0(K) = \mathbb{R}$，$H_i(K) = 0$ ($i = 1$, あるいは $i \geq 3$) となるので，$H_2(S^2) = H_0(S^2) = \mathbb{R}$, $H_i(S^2) = 0$ ($i = 1$, あるいは $i \geq 3$) となる．

3. 連続写像とホモロジー群の準同型

ここでは連続写像とホモロジー群の準同型との関係について説明する．単体的複体 K の頂点の集合から，別の単体的複体 K' の頂点の集合への写像 f で，K に属する勝手な単体 σ の頂点を K' に含まれる単体 σ' の頂点の集合に写すとき，f を単体写像と言うことにする．また，このとき σ の点 $x = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{e}_i$, ($\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$) について，

$$|f|(x) = \sum_i \lambda_i f(\boldsymbol{e}_i)$$

と定めると，$|f|$ は $|K|$ から $|K'|$ への連続写像となるが，これを f の実現と言うことにする．このように，単体的複体の間の単体写像から，それらの実現の間の連続写像が得られるが，逆に単体的複体間の勝手な連続写像は単体写像の実現で近似されることが知られている．このことを正確に説明するために，ホモトピーという概念を導入しよう．実現 $|K|$ から $|K'|$ への 2 つの連続写像 f_0 と f_1 とがホモ

トピックであるとは，連続写像 $|K|\times[0,\,1]\xrightarrow{F}|K'|$ で $F(x,0)=f_0(x)$, $F(x,1)=f_1(x)$, $(x\in|K|)$ を満たすものが存在することとして定義する．このとき，F は f_0 と f_1 の間のホモトピーを与えると言い，

$$f_0\sim f_1$$

と表すことにする．定義からこの関係は同値関係となる：

1. $f\sim f$,
2. $f\sim g\ \Rightarrow\ g\sim f$,
3. $f\sim g,\quad g\sim h\ \Rightarrow\ f\sim h.$

この概念を用いて，先に説明した事実は次のように述べられる：f を実現 $|K|$ から $|K'|$ への連続写像とすると，単体的複体 K から K' への単体写像 s で，その実現 $|s|$ が f とホモトピックになるものが存在する．さて f を単体的複体 K から L への単体写像とする．i 次元単体 σ について，もし $f(\sigma)$ が i 次元単体であれば $f_*(\sigma)=f(\sigma)$ と，またもし $f(\sigma)$ の次元が i より小さいのであれば $f_*(\sigma)=0$ とおいて，自然に拡張することにより準同型写像

$$C_i(K)\ \xrightarrow{f_*}\ C_i(L)$$

が定まり，この準同型は $\partial f_*=f_*\partial$ を満たすことが容易に確認される．したがって，これはホモロジー群の準同型写像

$$H_i(|K|)\ \xrightarrow{f_*}\ H_i(|L|)$$

を誘導し，もし単体写像 f と g の実現 $|f|$ と $|g|$ とがホモトピックであるならば $f_*=g_*$ が成立することが知られている．したがって実現 $|K|$ から $|L|$ への勝手な連続写像 α に対して，単体的複体 K から L への単体写像 f で，その実現 $|f|$ が α とホモトピックとなるものを任意に選び $\alpha_*=f_*$ とすると，$\sim$ は同値関係なので α_* は f の取り方によらずに決定される．このようにして単体的複体の実現間の連続写像 f からホモロジー群の準同型写像 f_* が定まることがわかるが，この対応は以下の性質を持つことが知られている：

ホモロジー群の準同型写像の性質

1. id により恒等写像を表すことにすると，$\mathrm{id}_*=\mathrm{id}$.
2. $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$.
3. ホモトピー不変性：$f\sim g\ \Rightarrow\ f_*=g_*$.

定義 3.1 単体的複体の実現 $|K|$ と $|L|$ の間に連続写像

$$|K|\xrightarrow{f}|L|,\quad |L|\xrightarrow{g}|K|$$

で

$$g\circ f\sim\mathrm{id}_{|K|},\quad f\circ g\sim\mathrm{id}_{|L|}$$

という性質をもつものが存在するとき，$|K|$ と $|L|$ はホモトピー同値であると言い，f あるいは g は $|K|$ と $|L|$ の間のホモトピー同値を与える，と言う．

次の定理は**ホモロジー準同型の性質**から直ちに従う．

定理 3.1 もし f が $|K|$ と $|L|$ の間のホモトピー同値を与えるのであれば，すべての i について f_* はホモロジー群の同型を与える：

$$H_i(|K|)\overset{f_*}{\simeq}H_i(|L|).$$

最後にいくつか例を挙げておく．

例 3.1 2 次元球体 $B^2=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1^2+x_2^2\leq 1\}$ は 1 点とホモトピー同値であるので，定理 3.1 から

$$H_i(B^2)=\begin{cases}\mathbb{R}, & もし\quad i=0,\\ 0, & もし\quad i\geq 1\end{cases}$$

となる．2 次元球面 $S^2=\{(x_0,x_1,x_2)\,|\,x_0^2+x_1^2+x_2^2=1\}$ のホモロジー群は

$$H_i(S^2)=\begin{cases}\mathbb{R}, & もし\quad i=0,\ あるいは 2,\\ 0, & もし\quad i\neq 0,2\end{cases}$$

と，さらに円周 $S^1=\{(x_0,x_1)\,|\,x_0^2+x_1^2=1\}$ のホモロジー群は

$$H_i(S^1)=\begin{cases}\mathbb{R}, & \text{もし}\quad i=0,\text{あるいは}1,\\ 0, & \text{もし}\quad i\neq 0,1\end{cases}$$

と求められる．

4. Brouwer の固定点定理

この節では，準備したホモロジー群の理論を用いて次の定理を証明しよう．

定理 4.1 B^2 からそれ自身への連続写像 f で，U^2 内に固定点を全く持たず，しかもその境界 S^1 に制限したものが S^1 からそれ自身への恒等写像となるものは存在しない．

証明 第1節で説明したように，もしそのような写像 f があったとすると B^2 から S^1 への連続写像 h で，境界 S^1 に制限すると恒等写像となるものが存在する．別の言い方をすれば，h に右から包含写像 $S^1 \overset{\iota}{\hookrightarrow} B^2$ を合成することにより，S^1 からそれ自身への恒等写像が得られる：

$$h\circ\iota=\mathrm{id}_{S^1}. \tag{4.1}$$

ここで包含写像とは，境界 S^1 は円板 B^2 の部分集合なので，その埋め込み写像のことである．

すでに説明したように，h と ι はそれぞれ線形写像 $H_1(B^2)\overset{h_*}{\to}H_1(S^1)$ と $H_1(S^1)\overset{\iota_*}{\to}H_1(B^2)$ を誘導するが，**ホモロジー群の準同型写像の性質** 1 と 2 より，これらを合成したもの $h_*\circ\iota_*$ は $H_1(S^1,\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}$ 上の恒等写像とならなければならない．しかし，$H_1(B^2)\simeq 0$ であったから，$h_*=\iota_*=0$ となり，特に $h_*\circ\iota_*=0$ となるので，これは矛盾である． □

高次元のホモロジー群を用いることにより，同様の議論から，定理 4.1 は次のように一般化されることがわかる．

定理 4.2 (Brouwer の固定点定理) f を，n 次元球体 $B^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\sum_{i=1}^n x_i^2\leq 1\}$ からそれ自身への連続写像でその境界 $S^{n-1}=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\sum_{i=1}^n x_i^2=1\}$ を保ち，さらに境界への制限が，S^{n-1} からそれ自身へのホモトピー同値な写像となるものとする．すると，そのような f は必ず内部 $U^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\sum_{i=1}^n x_i^2<1\}$ 内に固定点をもつ．

Brouwer の固定点定理（特にその無限次元版）は様々な分野，例えば偏微分方程式論，経済学，ゲーム理論等に応用されている．

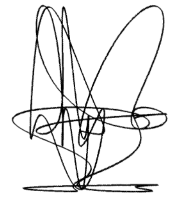
特に偏微分方程式論では解の存在を保障するために用いられる．

参考文献

1) S.P. Novikov. Topology I, *Encyclopaedia of Math. Sci.* vol **12**. Springer, 1986.
2) 服部晶夫，『多様体のトポロジー』岩波書店．

（すぎやま・けんいち，千葉大学理学部）

ホモトピー論・単体的集合から，その彼方へ



南　範彦

1. ホモトピー論

「ホモトピー」というのはあまり馴染みのない言葉なのかもしれない．日本語変換のリストにも通常入っていない．あるとき筆者の所属する大学に研究に関する書類を提出した折に，「ホモトピー」という言葉を使ったのであるが，提出後ほどなくして事務の方から「これは何かの間違いではないでしょうか！？」という電話があった．何と，「ホモトピー」と書いたつもりが自動変換されず，

「ホモとピー」

になっていたのだ．これを一見して何らの違和感も感じず書類を提出してしまった筆者も筆者かもしれないが，偶然にもこれは本質を言い得て妙なのである：

「ホモトピー論」
＝「ホモ(同一視)とピー(お友達 pal)になる」

さて，通常「ホモトピー論」と呼ばれるのは，基点付位相空間の（伝統的）ホモトピー論で，これは

「（基点付）位相空間を（基点を保つ）連続変形に関して同一視した圏の研究」

というスローガンで知られている．連続変形に関して不変な不変量を構築する観点からのホモトピー論の応用は古くから数多く知られ，その物理への応用も興味深いものがある[1,2]．しかしながら，本稿ではそのような個別な（局所的な）ホモトピー論の応用については一切考えない，本稿で考えるのはホモトピー論を同一視することとお友達になるための（大域的な）枠組みだ．でも，こんなことを言い出すと，いつの間にか general nonsense の罠に陥ってるカモ…

「そんなことをしてどうなるんだ！？」

と読者は訝しがられるに違いない．

さて，これに対する言い訳は本稿の最後でほんの少しだけ述べさせていただく[*1)]こととし，取りあえず，$\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}_*$ を各々位相空間のなす圏および基点付位相空間のなす圏としよう．すると，これらのホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathcal{T}), \mathcal{K}(\mathcal{T}_*)$ は，各々次で与えられる：

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{K}(\mathcal{T})) = \{\text{位相空間}\},$$
$$\mathcal{K}(\mathcal{T})(X,Y)(=[X,Y]\ \text{と通常書かれる})$$
$$:= \frac{X\ \text{から}\ Y\ \text{への連続写像のなす集合}}{\text{ホモトピー}\ \sim\ \text{による同値関係}},$$
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{K}(\mathcal{T}_*)) = \{\text{基点付位相空間}\},$$
$$\mathcal{K}(\mathcal{T}_*)(X,Y)(=[X,Y]_*\text{と通常書かれる})$$
$$:= \frac{X\ \text{から}\ Y\ \text{への基点を保つ連続写像のなす集合}}{\text{基点を保つホモトピー}\ \sim\ \text{による同値関係}}.$$

ここで連続写像 $f, g : X \to Y$ が**ホモトピック** $f \sim g$ であるとは，以下を満たす連続写像 $H : X \times [0,1] \to Y$ が存在するときを言う：

$$H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x), \quad \forall x \in X.$$

x_0, y_0 が各々 X, Y の基点のとき，基点を保つ連続写像 $f, g : X \to Y$ が**基点を保ちホモトピック** $f \sim$

*1)　そこまでは読者のご寛容をお願いする．どうか忍びがたきを忍び，耐えがたきを耐えていただきたい….

gとは，上のホモトピーを与える連続写像 $H : X \times [0,1] \to Y$ が更に次を満たすときを言う：

$$H(x_0, t) = y_0,\ \forall t \in [0,1].$$

特に，基点付位相空間 (X, x_0) と $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ に対し，S^n の基点 $b^n \in S^n$ を固定しておき，

$$\pi_n(X, x_0) := \mathcal{K}(\mathcal{T}_*)\left((S^n, b^n), (X, x_0)\right)$$

と置くと，これは $n=0$ のとき X の連結成分からなる集合を表し，$n=1$ のときは群となり基点付位相空間 (X, x_0) の**基本群**と呼ばれる．$n \geqq 2$ の場合は更に可換群となり，（$n=1$ の場合も含めて）基点付位相空間 (X, x_0) の**ホモトピー群**と呼ばれる．（混乱の心配がないときは X の基点を省いてただ単に $\pi_n(X)$ と表す．）

さて，位相空間 X, Y が圏 $\mathcal{K}(\mathcal{T})$ で同型であるとき，X と Y は**ホモトピー同値**であるといい，基点付位相空間 $(X, x_0), (Y, y_0)$ が圏 $\mathcal{K}(\mathcal{T}_*)$ で同型であるとき，(X, x_0) と (Y, y_0) は**基点付ホモトピー同値**であるという．(X, x_0) と (Y, y_0) が基点付ホモトピー同値ならば，当然 X と Y はホモトピー同値である．例えば，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の基点を原点 $\vec{0}$ に取れば，

$$f : \mathbb{R}^n \to \{*\}, \quad f(\vec{x}) = *, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$g : \{*\} \to \mathbb{R}^n, \quad g(*) = \vec{0}$$

を通して，$\mathbb{R}^n$ は一点集合 $\{*\}$ と基点付ホモトピー同値となる．実際 $f \circ g = id_{\{*\}}$ は明らかで $g \circ f \sim id_{\mathbb{R}^n}$ も

$$H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n;$$

$$H(\vec{x}, t) = t\vec{x} : \ \forall t \in [0,1], \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

によって与えられる．このようにすべての n 次元円盤 $\mathbb{R}^n$ を次元 n にかかわらず一点集合 $\{*\}$ と同一視してしまうとは，ホモトピー不変な性質とは何と粗雑な性質かと思われるかもしれない．しかしながら，（コ）ホモロジーはホモトピー不変量で，その（コ）ホモロジーを用いれば n 次元球面 $S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ たちが，空間のホモトピー圏において n を変えれば異なることがわかる．そもそも，（基点付）空間の圏からそのホモトピー圏に移行したって，とてつもなく難しいのだ．例えば，球面のホモトピー群 $\pi_n(S^k)$ の完全決定など夢のまた夢である．

しかしながら，このような専門家の内輪ネタなど聞かなくても，（基点付）空間のホモトピー圏のイヤラシさを，すでに感じ取られた読者も多いことであろう．2つの（基点付）位相空間 X, Y が（基点付）ホモトピー同値であることを示すのに，f, g と両方向の連続写像のみならず，ホモトピー $f \circ g \sim id_Y$，$g \circ f \sim id_X$ を具体的に構成することが一般には困難であろうことは，誰の目にも予想がつくだろう．こうした背景から，通常の入門レベルの代数的位相幾何学，ホモトピー論の教科書では，扱う位相空間の圏 $\mathcal{T}$ として（基点付）CW 複体の圏 $\mathcal{CW}, \mathcal{CW}_*$ をとることが多い．直観的に言って位相空間 X が CW 複体であるとは，離散点集合を基礎として，これに $n (\geqq 1)$ に関して順番に，任意個数（0 個でも任意濃度の無限個でもよい）の n 次元円盤 D^n をその境界である S^{n-1} を「のりしろ」として，次々にぺたぺたと貼り付けて構築した「建造物」である．実は多くの重要な幾何学的対象が CW 複体のホモトピー型を持つことが知られているのだ．例えば，可微分多様体が CW 複体のホモトピー型を持つことは，モース理論から直ちにわかる．*CW* 複体を扱う場合，$(Y, y_0) \in \mathcal{K}(\mathcal{CW}_*)$ の基本群 $\pi_1(Y, y_0)$ が $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$ に作用し，更に Y が連結ならば，自然な同型

$$[(X, x_0), (Y, y_0)]_* / \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} [X, Y]$$

が存在する．特に，Y が**単連結**（つまり $\pi_n(Y, y_0)$ が $n = 0, 1$ の場合ただ一つの元からなるとき）なら，

$$[(X, x_0), (Y, y_0)]_* \xrightarrow{\cong} [X, Y]$$

となる．しかしながら，（基点付）CW 複体のホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathcal{CW})$ $(\mathcal{K}(\mathcal{CW}_*))$ を扱う最大の利点は，以下の極めて重要な定理なのである：

定理 1 (J.H.C. Whitehead). **(i)** 基点付 *CW* 複体の間の基点を保つ連続写像 $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ が**基点付弱ホモトピー同値**，すなわち

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$$

がすべての n に対して同型写像ならば，f は

(X, x_0) と (Y, y_0) の間の基点付ホモトピー同値を誘導する．
(ii) CW 複体の間の基点を保つ連続写像 $f : X \to Y$ が**弱ホモトピー同値**，すなわち

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$$

がすべての n と $x_0 \in X$ に対して同型写像ならば，f は X と Y の間のホモトピー同値を誘導する．

このように $f : X \to Y$ が "良い" ことさえ分かれば，$g : Y \to X$ とホモトピー $f \circ g \sim I_Y$, $g \circ f \sim I_X$ を具体的に与えることなく，$f : X \to Y$ がホモトピー同値であることがわかることが，味噌なのである．とはいうものの，"良い" かどうか見極めるには，ひょっとしたらもっと "難解な" ホモトピー群を計算しなければならない．さて，それを打開するための鍵となるのが，次の結果である．

定理 2 (Hurewicz)．自然数 n を固定し，$H_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 g_{S^n} を固定しておく．連結な基点付 CW 複体 X に対し，Hurewicz 写像 h_n を，

$$h_n : \pi_n(X) \to H_n(X; \mathbb{Z}),$$
$$[f] \mapsto f_*(g_{S^n})$$

によって定義する．このとき，
(i) h_1 は同型 $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] \cong H_1(X)$
(ii) $n > 1$ として，X は $(n-1)$-連結，つまり $\pi_k(X) = 0$, $\forall k \leqq n-1$ とする．このとき，h_n は同型となる：$h_n : \pi_n(X) \cong H_n(X; \mathbb{Z})$.

例えばこれから直ちに次を得る：

$$n < k \implies \pi_n(S^k) = 0$$

一方，定理 2 の相対版もある．つまり基点付空間対 (X, A) に対しても同様に Hurewicz 写像

$$h_n : \pi_n(X, A, x_0) \to H_n(X, A)$$

が定義でき，これに関しても適当な条件の下，定理 2 と同様に同型となることが言える．それを用いると，定理 1 から次の極めて有用な結果が従う：

系 3. 単連結 CW 複体の間の連続写像 $f : X \to Y$ がすべての n に対して同型

$$f_* : H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(Y)$$

を誘導するとき，f はホモトピー同値である．

このように $\mathcal{K}(\mathcal{C}W), \mathcal{K}(\mathcal{C}W_*)$ は大変扱いやすいが，これらにも問題がある．球面のホモトピー群の例を見れば一目瞭然だが，$\mathcal{K}(\mathcal{C}W), \mathcal{K}(\mathcal{C}W_*)$ だって滅茶苦茶難しいのだ．それゆえ，ホモトピーで足場が滑り安定せず，確固たる建造物が構築できない $\mathcal{K}(\mathcal{C}W), \mathcal{K}(\mathcal{C}W_*)$ ではなく，足場のしっかりした $\mathcal{C}W, \mathcal{C}W_*$ のレベルで様々な圏論的建造物を構築し，それらをホモトピー群等，$\mathcal{K}(\mathcal{C}W), \mathcal{K}(\mathcal{C}W_*)$ での射集合の計算に応用したいのだ．ところが残念なことに，圏 $\mathcal{C}W, \mathcal{C}W_*$ は「狭すぎる」．例えば，$\mathcal{C}W, \mathcal{C}W_*$ で colim という圏論的構成を行うと，それは一般的には，すべての CW 複体が有するハウスドルフ性という位相空間の分離的性質を，もはや満たさない．また，閉対称モノイダルといった扱いやすい圏論的性質を要求しようとすると，2 つの CW 複体の通常の積位相空間や写像空間が必ずしも CW 複体とならないという問題に直面する．ところがここで奇跡が起こる．幸いなことに，コンパクト生成位相を持った弱ハウスドルフな (基点付) 位相空間の圏 $\mathcal{C}GWH$ ($\mathcal{C}GWH_*$) という $\mathcal{C}W$ ($\mathcal{C}W_*$) を含み，完備かつ余完備で閉対称モノイダルという圏論的に極めてよい性質をもった圏があるのだ．

例えば，$\mathcal{C}GWH_*$ において構成される写像空間の特別の場合である，基点付空間 X の**ループ空間**

$\Omega X :=$ S^1 から X への基点を保つ連続写像全体のなす位相空間

を本質的に用い，Serre は球面のホモトピー群に関する次の決定的な結果を得た：

定理 4 (J.P. Serre).

$$\pi_n(S^k) = \begin{cases} 0 & \text{if } n < k, \\ \mathbb{Z} & \text{if } n = k, \\ \mathbb{Z} \oplus (\text{有限アーベル群}) & \text{if } n = 4l-1, \\ & \quad k = 2l \text{ の形} \\ (\text{有限アーベル群}) & \text{if その他の場合} \end{cases}$$

注意しておくが，有限なアーベル群と言っても，具体的にどのような群になるかを完全に決定するなど，現実的には全く不可能なのだ．それでも読者は，この美しい定理を目の当たりにし，$\mathcal{K}(\mathcal{CGWH})$, $\mathcal{K}(\mathcal{CGWH}_*)$ で一件落着と思うだろう．ところが困ったことに，$\mathcal{K}(\mathcal{CGWH})$, $\mathcal{K}(\mathcal{CGWH}_*)$ では定理 1 の J.H.C. Whitehead の定理が成立しない．つまり，$\mathcal{K}(\mathcal{CGWH})$, $\mathcal{K}(\mathcal{CGWH}_*)$ では（基点付）弱ホモトピー同値だからと言っても，（基点付）ホモトピー同値とは限らないのだ．これはまずい，実際，（基点付）CW 複体という $\mathcal{K}(\mathcal{CGWH})$, $\mathcal{K}(\mathcal{CGWH}_*)$ の最も基本的な対象に対して，（基点付）弱ホモトピー同値という概念を通して，系 3 という決定的な結果が得られている．こんなのを見せつけられると，いやおうなしにも（基点付）弱ホモトピー同値という性質を中心に置きたくなるのだ．そこで，いっそのこと，$\mathcal{K}(\mathcal{CGWH})$, $\mathcal{K}(\mathcal{CGWH}_*)$ では（基点付）弱ホモトピー同値なら「同値」と思ってしまおう．そして，$\mathcal{K}(\mathcal{CGWH})$, $\mathcal{K}(\mathcal{CGWH}_*)$ でのすべての（基点付）弱ホモトピー同値 $f: X \to Y$ に対し，その「逆：$f^{-1}: Y \to X$」を無理やり形式的に加える**圏の局所化**によって得られる“圏”

$$\mathcal{K}(\mathcal{CGWH})\left[(\text{弱ホモトピー同値})^{-1}\right],$$
$$\mathcal{K}(\mathcal{CGWH}_*)\left[(\text{基点付弱ホモトピー同値})^{-1}\right]$$

を考えてしまおう．ところが悲しいことに，今度は射を増やして圏の局所化を考えたためにこれらの“圏”において任意の 2 つの対象間の射の集まりが集合となって本当にこれらが圏となるか，全く定かでなくなってしまう！ こっちをとればあっち立たず…，あたかもいつまで経っても満足の行く（基点付）空間のホモトピー圏など，決して得られないように思える…．

さて，このような杞憂を一気に晴らしてくれるのが次の定理である：

定理 5. これらは圏となり，次の圏同値が存在する：

$$\mathcal{CGWH}\left[(\text{弱ホモトピー同値})^{-1}\right]$$
$$\cong \mathcal{K}(\mathcal{CGWH})\left[(\text{弱ホモトピー同値})^{-1}\right] \cong \mathcal{K}(\mathcal{CW}),$$
$$\mathcal{CGWH}_*\left[(\text{基点付弱ホモトピー同値})^{-1}\right]$$
$$\cong \mathcal{K}(\mathcal{CGWH}_*)\left[(\text{基点付弱ホモトピー同値})^{-1}\right]$$
$$\cong \mathcal{K}(\mathcal{CW}_*).$$

この同値な圏たちこそが，「伝統的」ホモトピー論の研究対象，（基点付）空間のホモトピー圏である．

2. 単体的集合

単体的集合は，それ自身の重要性もさることながら，空間のホモトピー圏という「伝統的」ホモトピー論から，Quillen モデル圏という「抽象的」ホモトピー論へ移行する際にも，極めて重要なヒントを与える．まずは，定義を述べよう．基点付の場合も同様なので，以下基点を考えない場合を考える．

最初に，非負整数 n に対し $[n]:=\{0,1,2,\cdots,n\}$ と置き，**単体圏** $\triangle$ を以下のように定義する：

$$\mathrm{Ob}(\triangle) = \{[n] \mid n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}\},$$
$$\triangle([m],[n]) = \{\ [m] = \{0,1,2,\cdots,m\} \text{ から } [n] = \{0,1,2,\cdots,n\} \text{ への順序を保つ写像 }\}.$$

すると，**単体的集合** $K_\bullet$ は $\triangle$ の射の向きを逆にして得られる圏 $\triangle^{op}$ から集合の圏 Set への共変関手として定義される．それより，各 $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ と，順序を保つ写像 $f: [m] = \{0,1,2,\cdots,m\} \to [n] = \{0,1,2,\cdots,n\}$ に対し，集合 K_n と写像 $f^*: K_n \to K_m$ が関手的に，すなわち

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*; \quad (id_{[n]})^* = id_{K_n}$$

となるように，定まっている．単体的集合全体は自然変換を射として圏をなす，それを $sSet$ と表す．$sSet$ は完備・余完備等，圏論的に扱いやすい．

3 つの典型的な単体的集合の例をあげよう：

1. 非負整数 $n \geqq 0$ に対し，**標準 n 単体的集合**を $\triangle^n := \triangle(-,[n])$ とおく：

$$\triangle^n : \triangle^{op} \to Set, \quad [m] \mapsto \triangle([m],[n])$$

2. 非負整数 $n \geqq 0$ に対し，**標準位相 n 単体**を，

$$|\triangle^n| := \{(x_0,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leqq x_i \leqq 1,\ \Sigma_{i=0}^n x_i = 1\}$$

により表す．すると位相空間 X に対し $\mathcal{CGWH}(|\triangle^n|, X)$ を位相は忘れてただ単に集合と思って，**特異単体的集合** $S_\bullet(X)$ が定義できる：

$$S_\bullet(X) : \triangle^{op} \to Set,$$
$$[n] \mapsto S_n(X) := \mathcal{CGWH}(|\triangle^n|, X).$$

この構成は関手をなし，**特異単体的集合関手** $S_\bullet(-)$ を定義することに注意しておく：

$$S_\bullet(-) : \mathcal{CGWH} \to sSet, \quad X \mapsto S_\bullet(X).$$

3. 小圏（:= 対象の集まり Ob が集合をなす，よって射の集まり Mor も集合をなす，圏）C の**神経（nerve）** $\mathcal{N}_\bullet C$ を，

$$\mathcal{N}_\bullet C : \triangle^{op} \to Set,$$
$$[n] \mapsto \mathcal{N}_n C := \overbrace{\mathrm{Mor}(C) \times_{\mathrm{Ob}(C)} \cdots \times_{\mathrm{Ob}(C)} \mathrm{Mor}(C)}^{n+1}$$

によって与えられる単体的集合とする．ここで $\overbrace{\mathrm{Mor}(C) \times_{\mathrm{Ob}(C)} \cdots \times_{\mathrm{Ob}(C)} \mathrm{Mor}(C)}^{n+1}$ は，C での

$$c_0 \xrightarrow{f_0} c_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} c_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} c_n$$

なる形の対象と射のなす図式全体のなす集合．

このとき，$\mathcal{N}_0 C = \mathrm{Ob}(C)$, $\mathcal{N}_1 C = \mathrm{Mor}(C)$ なので，$\mathcal{N}_\bullet C$ からは小圏 C の情報が回復できる．

このように $sSet$ は，小圏のなす圏の情報を神経を通して含んでいる．極めてリッチな圏なのだ．これは研究し甲斐がある！ と喜ぶと同時に，そんなにリッチだと複雑すぎて難しすぎるだろう，こりゃあ $sSet$ に適当な弱同値関係を導入するか，扱いやすい部分圏に制限して簡略して考えない限り，興味深い結果はなかなか得られないのでは…と思わざるを得ない．やはり，「同一視」と「お友達」でなければならないのだ．

「同一視」と言えば，我々はすでに位相空間 $\mathcal{CGWH}$ の場合定理 1 において，CW 複体のなす圏に制限するか，あるいは弱ホモトピー同値を導入することにより，空間のホモトピー圏が構成されることを見て，「同一視」と「お友達」になることができた．そこで位相空間の場合に $[0,1]$*2) を用いてホモトピー圏を導入した経緯に倣い，2 つの単体的集合（すなわち関手）の間の射（すなわち自然変換）$f_\bullet, g_\bullet : K_\bullet \to L_\bullet$ が**ホモトピック** $f_\bullet \simeq g_\bullet$ であるとは，ある単体的集合（すなわち関手）の間の射（すなわち自然変換）

$$H : K_\bullet \times \triangle^1 \to L_\bullet$$

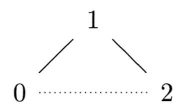
が存在して，次が成立するときと言おう：

$$H\big|_{K_\bullet \times \{0\}} = f_\bullet, \quad H\big|_{K_\bullet \times \{1\}} = g_\bullet.$$

凶報． 2 つの単体的集合の間の射に対する関係 “ホモトピック” $f_\bullet \simeq g_\bullet$ は，同値関係でない！

吉報． **(i)** $L_\bullet$ が Kan 複体と呼ばれる特別の性質を持った単体的集合の場合は，2 つの単体的集合の間の射 $f_\bullet, g_\bullet : K_\bullet \to L_\bullet$ に対するホモトピック $f_\bullet \simeq g_\bullet$ という関係は，同値関係となる．
(ii) 特異単体的集合 $S_\bullet(X)$ は Kan 複体となる．

Kan 複体の定義を述べるために記号を用意する．最初に $0 \leqq i \leqq n$ に対し，標準位相 n 単体 $|\triangle^n|$ の境界 $|\partial\triangle^n|$ から，i 番目の頂点を含まない $(n-1)$ 単体の内部を取り除いたものを $|\Lambda^n_i|$ と表す．

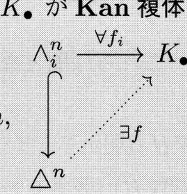


（実線の部分が $|\Lambda^2_1|$）

標準 n 単体的集合 $\triangle^n$ が後で述べる幾何学的実現を通して標準位相 n 単体 $|\triangle^n|$ に対応するように，単体的集合 Λ^n_i で幾何学的実現を通して $|\Lambda^n_i|$ に対応するものが標準的に存在する．単体的集合の間の射 $f : \triangle^n \to K_\bullet$ は K_n の元，つまり $K_\bullet$ の n 単体に対応するのに対し，単体的集合の間の射 $f_i : \Lambda^n_i \to K_\bullet$ は K_{n-1} の n 個の元，つまり $K_\bullet$ の n 個の $n-1$ 単体で，幾何学的実現を施したとき，境界部分での写像が貼り合わさって連続写像 $|\Lambda^n_i| \to |K_\bullet|$ を誘導するものに対応する．さて，

定義 6. 単体的集合 $K_\bullet$ が **Kan 複体**

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $0 \leqq \forall i \leqq n$,



---

*2) 後で述べる幾何学的実現関手 $|-|$ により，$[0,1] \cong |\triangle^1|$.

すると，いやなことに $n \geqq 1$ のとき $\triangle^n$ はKan複体とならない．また，小圏 C の神経 $\mathcal{N}_\bullet C$ も必ずしもKan複体とはならない．実際，次が成立：

命題 7. 単体的集合 $K_\bullet$ が小圏 C の神経 $\mathcal{N}_\bullet C$ に同型

$$\Longleftrightarrow\ 0 < \forall i < n,\quad \begin{array}{ccc} \Lambda^n_i & \xrightarrow{\ \forall f_i\ } & K_\bullet \\ \big\downarrow & \nearrow_{\exists 1 f} & \\ \triangle^n & & \end{array}$$

さてKan複体のなす圏を $\mathcal{K}an$ と表し，ホモトピック $\simeq$ による同値関係を用いてホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathcal{K}an)$ を考えたいのだが，$\mathcal{K}(\mathcal{K}an)$ も $\mathcal{K}(\mathcal{CW})$ 同様，滅茶苦茶難しい．そこで $\mathcal{K}an$ において様々な圏論的構成を行おうとすると，$\mathcal{K}an$ は $\triangle^n$ を含まず $\mathcal{CW}$ 同様「狭すぎる」．かといって，$\mathcal{K}an$ を含む圏論的性質も良い $sSet$ では，ホモトピック $\simeq$ による関係が同値関係でない！

さて，この困難を救ってくれるのが，すでに何度も引用した**幾何学的実現関手** $|-|$ である：

$$|-| : sSet \to \mathcal{CGWH}$$

$$K_\bullet \mapsto |K_\bullet| := \left(\coprod_{n \geq 0} K_n \times |\triangle^n| \right) \Big/ \sim .$$

ここで同値関係 $\sim$ は，すべての $(f : [m] \to [n]) \in \mathrm{Mor}(\triangle)$，$k_n \in K_n$，$d_m \in |\triangle^m|$ に対して，

$$(f^*(k_n), d_m) \sim (k_n, f_*(d_m))$$

となる関係により，生成される．単体的集合 $K_\bullet$ に対し $|K_\bullet|$ は $K_\bullet$ の**幾何学的実現**と呼ばれる．例えば，標準 n 単体的集合 $\triangle^n$ の幾何学的実現 $|\triangle^n|$ は，標準位相 n 単体 $|\triangle^n|$ に他ならない．これが標準位相 n 単体を $|\triangle^n|$ と表す所以である．また，小圏 C の神経 $\mathcal{N}_\bullet C$ の幾何学的実現は，**分類空間** BC と呼ばれ，小圏を（伝統的）ホモトピー論的手法による研究をするための出発点となる．

幾何学的実現を用いて，2つの単体的集合の間の射 $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ が**弱ホモトピー同値**であるとは，その幾何学的実現 $|f_\bullet| : |X_\bullet| \to |Y_\bullet|$ が $\mathcal{CGWH}$ の射として弱ホモトピー同値であるときと定義する．

すると，我々の求める単体的集合のホモトピー圏は，次で与えられる：

定理 8. 圏の局所化 $sSet\left[(\text{弱ホモトピー同値})^{-1}\right]$ は圏となり，次の圏同値が存在する：

$$sSet\left[(\text{弱ホモトピー同値})^{-1}\right] \cong \mathcal{K}(\mathcal{K}an).$$

実は，この単体的集合のホモトピー圏は，前節で見た空間のホモトピー圏と圏同値となるので，これもまた，伝統的「ホモトピー論」である：

定理 9. **(i)** 幾何学的実現 $|-|$ と特異単体的集合関手 $S_\bullet(-)$ は随伴対をなす：

$$|-| : sSet \rightleftarrows \mathcal{CGWH} : S_\bullet$$

$$sSet\,(K_\bullet, S_\bullet(X)) \cong \mathcal{CGWH}\,(|K_\bullet|, X);$$

$$\forall K_\bullet \in sSet, \forall X \in \mathcal{CGWH}.$$

(ii) "弱ホモトピー同値" を "*w.e.*" と略記する．すると上の随伴対は，圏の随伴同値を誘導する：

$$\begin{array}{ccc} |-| : sSet[(w.e.)^{-1}] & \cong & \mathcal{CGWH}[(w.e.)^{-1}] : S_\bullet \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ \mathcal{K}(\mathcal{K}an) & & \mathcal{K}(\mathcal{CW}) \end{array}$$

3. その彼方へ

筆者が前2節で抽象的な議論を繰り広げた*3)理由は，経験的に**「同一視」と「お友達」になる一番の秘訣は，伝統的「ホモトピー論」と無二の親友になること**が言えるからである．この状況を，Quillenモデル圏と，quasi category（擬圏とでも訳せば良いのだろうか）の場合に要約しよう．

Quillenモデル圏の正確な定義[4]は紙数の制限のため述べられないが，一言でいって，「ホモ（同一視）」（対応する射の集まりは**weak equivalence**と呼ばれる）とお友達になるのに，**cofibration**, **fibratoin**という2種類の射の集まりの方々*4)の

*3) ここまで忍びがたきを忍び，耐えがたきを耐えてお付き合いして下さった読者には，心から感謝を申し上げる．

*4) 各々，「話し上手」と「聞き上手」な方々である．

お力を拝借するというもので，その真髄は，伝統的「ホモトピー論」でいうところの**HELP**[*5)]（= homotopy extension and lifting property）という，次の図式を可換にする点線の射 h が存在するかどうかの性質を見極めることにある：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle c}\big\downarrow & \overset{h}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[g]{} & Y, \end{array}$$

例えば，伝統的「ホモトピー論」における重要な定理 5，定理 8，定理 9 の最も見通しの良い証明は，Quillen モデル圏の枠組みで与えられる．

一方，Dwyer–Kan は，Serre の定理（定理 4）の証明でのループ空間の応用以来伝統的「ホモトピー論」において強力に使われてきた写像空間の類似が Quillen モデル圏のレベルでも構成できることを示した．これは例えば，最近の Toen–Vezzosi[5,6] による Grothendieck 流の代数幾何の枠組みを極めてスケール大きく一般化しようとする Homotopical Algebraic Geometry の理論や，Toen[7] による dg 圏のなす圏上のモデル圏構造を用いて定まる写像空間の研究とそれから従う dg 圏に対する森田理論において，極めて本質的な役割を果たした．Toen は後者の系として，2 つの smooth 固有スキームの準連接層から定まる dg 圏の perfect 複体からなる部分 dg 圏の間の dg 射は，すべて Fourier–向井型で与えられることを示した．更に Toen[8] は，この dg 圏に対する森田理論を用いて導来ホール代数を構成し，その量子群の理論への応用が期待されている．

近年，数理物理等多くの所で，射の合成が厳密に結合的ではなく，通常の意味で圏（勿論モデル圏も含む）ではないものを取り扱う必要が出てきた．Boardman–Vogt による quasi category は，そのような問題を扱う一つの枠組みである：

定義 10. 単体的集合 $K_\bullet$ が，**quasi category**

$$\overset{\text{定義}}{\iff} \quad 0 < \forall i < n, \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \xrightarrow{\forall f_i} & K_\bullet \\ \big\downarrow & \overset{\exists f}{\nearrow} & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

定義 6 と命題 7 より，quasi category は，Kan 複体と小圏の神経を共に一般化する概念であることがわかる．それゆえ，quasi category 論は，通常のホモトピー論と (small) category 論を共に一般化する理論である．ここに，射の合成が厳密に結合的ではないので通常の意味で圏ではないものを取り扱う余地が出てくるのである．そしてモデル圏の場合と同様，quasi category の場合も写像空間が定義でき，有用に使われるのである．

極く最近，Lurie[9,10] は quasi category を用いて Toen–Vezzosi の Homotopical Algebraic Geometry を極めて見通し良く書き変えつつある．それどころか，Grothendieck のスキーム理論のほとんどを，その枠組みで書き変えてしまうのではないかとさえ言われてるのだ．大変な時代になった．

*5)「同一視」をすることに行き詰った場合には，思いっきり「HELP!」と叫べば，「ホモ（同一視）」の神様があなたに優しく微笑みかけて下さるだろう．

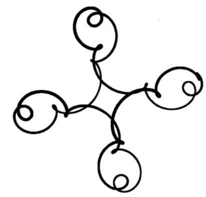
参考文献

1) 河野俊丈，代数的位相幾何と物理，数理科学 2007 年 7 月号．
2) 倉辻比呂志，『トポロジーと物理』，パリティ物理学コース（丸善）1995 年．
3) 西田吾郎，『ホモトピー論』（共立出版）1985 年．
4) Mark Hovey, Model Category, American Mathematical Society, 1999.
5) Bertrand Toen and Gabriele Vezzosi. *Homotopical Algebraic Geometry I*: Topos theory, arXiv: math.AG/0207028.
6) Bertrand Toen and Gabriele Vezzosi. *Homotopical Algebraic Geometry II*: geometric stacks and applications, arXiv:math.AG/0404373.
7) Bertrand Toen. *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory*, arXiv:math. AG/0408337.
8) Bertrand Toen. *Derived Hall Algebras*, arXiv:math. QA0501343.
9) Jacob Lurie, Higher Topos Theory, **http://www-math.mit.edu/~lurie/**
10) Jacob Lurie, Derived Algebraic Geometry I, II, III, IV, ···, **http://www-math.mit.edu/~lurie/**

（みなみ・のりひこ，名古屋工業大学機械工学科）

モノドロミー

多価性を測るものさし



木村　弘信

1. はじめに

モノドロミーという言葉で読者はどのようなことを思い浮かべるだろうか．数学を学んで最初にこの言葉に出会うのは複素関数論においてかもしれない．そこでは解析接続の概念や一価性定理というものを学ぶ．ある道に沿って関数が解析接続されたときに，一価にとどまるかどうかということを問題にする．逆に言えば，一価でない関数を想定していることになる．一価にならない度合いを測るのがモノドロミーである．一価でない関数として対数関数 $\log x$ を考えよう．これは変数 $x \in \mathbb{C}$ の関数というより極座標 (r, θ) の関数で，$\log x = \log r + i\theta$ で与えられる．ここで $r = |x|$, θ は x の偏角で $\arg x$ とも書かれる．x が 0 の周りを正の向きに一周して元の点に戻ったときにそれを $\tilde{x}$ と表すと，関数の値は $\log \tilde{x} = \log r + i(\theta + 2\pi) = \log x + 2\pi i$ となって元の値には戻らない．複素変数のベキ関数はこの対数関数を用いて $x^a = e^{a \log x}$ で定義される．x が 0 の周りを正の向きに回ったとき，$x^a \mapsto x^a e^{2\pi i a}$ という変化を受けることが分かるだろう．この場合 $e^{2\pi i a}$ がモノドロミーである．x^a は $x = 0$ に特異点をもつ微分方程式 $y' = (a/x)y$ の解として特徴づけられる．より複雑な $x = t_1, \cdots, t_p$ に特異点を持つ 1 階方程式

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{x - t_j} \right) y \tag{1}$$

を考えると，この解は $y(x) = (x - t_1)^{a_1} \cdots (x - t_p)^{a_p}$ の定数倍である．閉曲線 γ が t_j の周りを正の向きに回ることを $+1$ 回，負の向きに回ること -1 回と勘定するとき，$t_1, \cdots, t_p$ の周りを，それぞれ $n_1, \cdots, n_p$ 回回ったとすると，モノドロミーは $e^{2\pi i (a_1 n_1 + \cdots + a_p n_p)}$ であることが納得されるだろう．これらは簡単な例であるが，しばしば次の形の微分方程式のモノドロミーが数学，物理学や工学において重要な役割を果たすことがある．

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{x - t_j} \right) y. \tag{2}$$

ここで，A_j たちは x と無関係な n 次行列とする．この小文のテーマはこの方程式のモノドロミー表現である．

2. Schlesinger 型方程式

方程式 (2) を $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ において考える．$x = t_1, \cdots, t_p$ は方程式の特異点であることは一目瞭然であるが，(2) を $x = \infty$ で考えるときは $x = 1/\xi$ とおいて

$$\frac{dy}{d\xi} = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{\xi(t_j \xi - 1)} \right) y \tag{3}$$

と書き直す．$x = \infty$ に対応する点 $\xi = 0$ は右辺の 1 位の極で，そこでの留数は $A_{p+1} := -\sum_{i=1}^{p} A_j$ であることが分かる．したがって

$A_{p+1} \neq 0$ であれば $x = \infty$ も特異点である．$S := \{t_1, \cdots, t_p, t_{p+1} = \infty\}$ は確定特異点と呼ばれるものになっていて，後で述べるように，これらの点における解の挙動が比較的穏やかなものである．(2) は S に確定特異点を持つ微分方程式の中で特別な形をしており，特に Schlesinger 型（S 型）と呼ばれる．

特殊関数として重要な位置を占める Gauss の超幾何関数やそれの拡張である一般化超幾何関数は S 型方程式の解として特徴づけられ，その大域的な振舞いが具体的に調べられているものである．（3.4 節および 4.2 節参照.）

方程式 (2) についてどのようなことを調べるかということを，もう少し詳しく述べると次のようになる．

1. 特異点 t_j の周りで解がどのような振舞いをするかを調べること．特徴的な振舞いをする解の基本系 $Y^{(j)}$ を構成すること．
2. 解の基本系 $Y^{(i)}$ と $Y^{(j)}$ がどのような一次関係で結ばれているかを調べること．

最初の問は大雑把に言えば次のようになる．方程式 (2) は $x = t_j$ において

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{A_j}{x - t_j} + (t_j \text{ で正則な項})\right) y \quad (4)$$

の形をしている．ここで，乱暴であるが $x = t_j$ での正則な部分を無視した

$$\frac{dz}{dx} = \frac{A_j}{x - t_j} z$$

を考えると，解の基本系として $Z(x) = (x - t_j)^{A_j} := e^{A_j \log(x - t_j)}$ を持つ．$A_j = \mathrm{diag}\,(a_1, \cdots, a_n)$ であれば $Z(x) = \mathrm{diag}\,((x-t_j)^{a_1}, \cdots, (x-t_j)^{a_n})$ であることからも分かるように，増大度はベキ関数程度のものである．また $x = t_j$ の周りでの解析接続の様子も良く分かる．実際，x が t_j の周りを正の向きに一周する道に沿って動いて元の点に戻ったとき $Z(x)$ の解析接続を $\tilde{Z}(x)$ とすると

$$\tilde{Z}(x) = e^{A_j\{\log(x - t_j) + 2\pi i\}} = Z(x) e^{2\pi i A_j}$$

となる．では，元の方程式 (4) の場合はどうであろうか．変換 $y = P(x)z$ によって (4) の右辺の正則な部分を消すことを考える．A_j の固有値が 0 以外の整数差を持たなければ，$P(t_j) = I$ を満たす t_j で一価な $P(x)$ を用いてこのようなことができる．したがってこのときには $Y(x) = P(x)Z(x)$ の解析接続は $Y(x) \mapsto Y(x)e^{2\pi i A_j}$ と表されることが分かる．

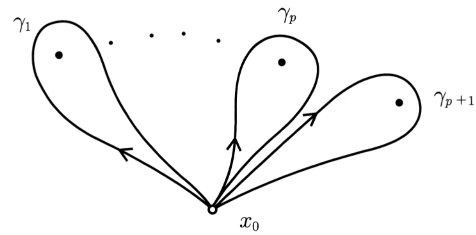


図 1　基本群の生成元.

2 番目の問題は接続問題と呼ばれ難しい問題であるが，そこまで分からなくても $x_0 \in X := \mathbb{P}^1 \setminus S$ を始点および終点とする閉曲線 γ に沿った解析接続の情報が分からないかという問題設定があり得る．これがモノドロミー群を決定するということである．

x_0 を始点および終点とする X 内の閉曲線のホモトピー類のなす基本群を $\pi_1(X, x_0)$ と表す．$\sigma, \tau \in \pi_1(X, x_0)$ の積 $\sigma\tau$ を σ の表す道の終点に τ の始点をつなげて得られる道の定める元として定義する．1 で x_0 にずっと留まる道によって定まる元を表す．$\gamma_1, \cdots, \gamma_p, \gamma_{p+1}$ を図 1 のように定めると，$\pi_1(X, x_0)$ はこれらで生成され，関係式 $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \cdots \cdot \gamma_{p+1} = 1$ が成り立つ．$Y(x)$ を x_0 における (2) の解の基本系とし，$\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ に沿った解析接続を $\gamma_* Y$ とすると，$\gamma_* Y = Y \cdot \rho(\gamma)$ となる $\rho(\gamma) \in GL(n)$ が定まる．$\gamma \mapsto \rho(\gamma)$ により（反）準同型 $\rho : \pi_1(X) \to GL(n)$ が定まり，これを $Y(x)$ に関するモノドロミー表現と言う．別な解の基本系 $\tilde{Y}(x) = Y(x)C$, $C \in GL(n)$ をとると，$\tilde{Y}$ についての表現 $\tilde{\rho}$ は $\tilde{\rho}(\gamma) = C^{-1}\rho(\gamma)C$ となり，ρ と $\tilde{\rho}$ は同値な表現を与える．$G = \rho(\pi_1(X, x_0))$ を $Y(x)$ に対するモノドロミー群と言う．$M_j = \rho(\gamma_j)$ とおくとき $M_1, \cdots, M_{p+1}$ を具体的に求めることが微分方程式の重要な問題の一つである．

次のことを論じよう．

1) モノドロミー群はどのような方法で計算されるか．

2) モノドロミー群が具体的に計算されるのはどのような場合か．

3) モノドロミー保存変形について．

3. モノドロミーの計算

3.1 Gauss の超幾何方程式

方程式 (2) のモノドロミー群を具体的に求めることは難しい問題である．このことについて，どのようなことが問題になるかを明確にするために，具体例として Gauss の超幾何方程式

$$x(1-x)w''+\{c-(a+b+1)x\}w'-abw=0 \quad (5)$$

を考えよう．$x=0,1,\infty$ は方程式の特異点である．(5) は，未知関数 $y={}^t(y_1,y_2)$ を適当に定めることにより，S 型方程式 (2) で $n=2, S=\{0,1,\infty\}$,

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ c-a & -c\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}c-a-1 & b-c\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad (6)$$

の場合と同値になることが知られている．

(5) は $x=0$ において $w(0)=1$ を満たす正則な解を持ち，次で与えられる：

$$f_1^{(0)}(x)={}_2F_1(a,b,c;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k k!}x^k$$

ここで $(a)_k=a(a+1)\cdots(a+k-1)$．さらに

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-xu)^{-b}dt$$

の形の Euler 積分で表される．これと一次独立な解として

$$f_2^{(0)}(x)=x^{1-c}{}_2F_1(a-c+1,b-c+1,2-c;x)$$

が取れる．いずれも

$$f_j^{(0)}=x^{\alpha_j}(1+c_1x+c_2x^2+\cdots),\quad (j=1,2)$$

の形のベキ級数で表されている．ここで $(\alpha_1,\alpha_2)=(0,1-c)$ は $x=0$ における特性指数と呼ばれ，解が $x=0$ の周りでどのような多価性を持つかという量を表す．他の特異点 $1,\infty$ においては特性指数は $(0,c-a-b),(a,b)$ で，これらを表にしたものがリーマン図式である：

$$\begin{bmatrix}x=0 & x=1 & x=\infty\\ 0 & 0 & a\\ 1-c & c-a-b & b\end{bmatrix}. \quad (7)$$

$x=1$ における特性指数に対応した解は

$$f_1^{(1)}={}_2F_1(a,b,a+b+1-c;\xi),$$
$$f_2^{(1)}=\xi^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b,c-a-b;\xi)$$

で与えられる．ここで $\xi=x-1$．方程式 (5) はリーマン図式を与えると完全に決まってしまうことが示せる．一般には，特異点およびリーマン図式を与えたとき，これらのデータからは定まらないパラメータが方程式の係数に入ってくる．このようなパラメータをアクセサリーパラメータと呼ぶ．Gauss の方程式はアクセサリーパラメータを持たない方程式である．方程式にアクセサリーパラメータが含まれる場合は，一般にはそのモノドロミー群を決定することは困難であると信じられている．Gauss の方程式の重要な特徴の一つとして，Euler 型積分表示によってすべての解を表すことができるということがある．特に

$$F_{pq}(x)=\int_p^q u^{\lambda_1}(u-1)^{\lambda_2}(1-xu)^{\lambda_3}\,du \quad (8)$$

は各特異点における特性指数に対応する様々な解を与える．ここで，$\lambda_1=a-1, \lambda_2=c-a-1, \lambda_3=-b$ で，積分路は 2 点 $p,q\in\{0,1,1/x,\infty\}$ を結ぶ道である．

3.2 積分表示によるモノドロミー群の決定

(5) のモノドロミー群を決定するには，次がある．

1) 積分表示による方法．

2) Gauss–Kummer の等式を用いる方法．

3) 基本群の構造から導かれる関係式による方法．

以下では，1), 2) について述べる．詳しい議論

と 3) については文献 4, 5) を参照して頂きたい．

リーマン図式 (7) に与えられた特性指数を持つ解 $f_1^{(*)}, f_2^{(*)}$ は，積分表示で与えられる次の解 $W^{(*)} = (g_1^{(*)}, g_2^{(*)})$ とそれぞれ定数倍を除いて一致する．

$$\begin{cases} g_1^{(0)} = F_{01} \\ g_2^{(0)} = F_{\frac{1}{x}\infty} \end{cases}, \begin{cases} g_1^{(1)} = F_{1\frac{1}{x}} \\ g_2^{(1)} = F_{\infty 0} \end{cases}, \begin{cases} g_1^{(\infty)} = F_{0\frac{1}{x}} \\ g_2^{(\infty)} = F_{1\infty} \end{cases}$$

$W^{(0)}$ についてのモノドロミー表現を求めよう．$x = 1/2$ を基点とし，$x = 0$ と $x = 1$ の周りを正の向きに回って戻る閉じた道をそれぞれ γ_1, γ_2 とするとき，$(\gamma_j)_* W^{(0)} = W^{(0)} M_j$ となる $M_j \in GL(2)$ が求めるべきものである．まず，特性指数の情報から $(\gamma_1)_* W^{(0)} = W^{(0)} C_1$，$(\gamma_2)_* W^{(1)} = W^{(1)} C_2$ となる $C_1, C_2 \in GL(2)$ は

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & e(a) \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & e(c-a-b) \end{pmatrix}$$

と定まる．ここで $e(a) = e^{2\pi i a}$．したがって接続関係

$$W^{(0)} = W^{(1)} P, \quad P \in GL(2) \tag{9}$$

が分かれば，$W^{(0)}$ に関するモノドロミー行列は

$$M_1 = C_1, \quad M_2 = P^{-1} C_2 P \tag{10}$$

と具体的に分かる．P を求めるには，積分表示 (8) より得られる次の関係式を用いる．

$$\begin{aligned} &F_{01} + F_{1\infty} + F_{\infty 0} = 0, \\ &F_{01} + F_{1\frac{1}{x}} - F_{0\frac{1}{x}} = 0, \\ &e(-\lambda_2) F_{1\infty} - F_{1\frac{1}{x}} - F_{\frac{1}{x}\infty} = 0, \\ &e(\lambda_1) F_{\infty 0} + F_{0\frac{1}{x}} + e(\lambda_3) F_{\frac{1}{x}\infty} = 0. \end{aligned}$$

例えば，最初の式は図 2 の単連結領域 D_1 の境界上での積分が Cauchy の積分定理より 0 となることから従う．これらの関係式から，$x = \infty$ における解 $F_{0\frac{1}{x}}, F_{1\infty}$ を消去することによって (9) の P が求まる．

ここで述べたのは，特異点 $x = 0, 1$ における特徴的な局所解 $W^{(0)}, W^{(1)}$ をつなぐ接続関係式を求めることによってモノドロミー行列を計算する方法であり，実はモノドロミー行列よりも詳しい情報を調べていることに注意しておく．

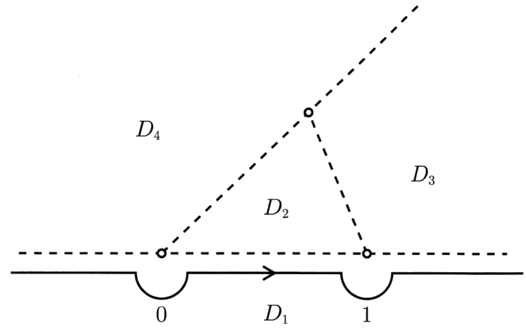


図 2　F_{pq} たちの関係を与える道．

3.3 Gauss–Kummer の等式による方法

Gauss–Kummer (G–K) の等式とは，$\Re(c-a-b) > 0$ の下で成り立つ

$${}_2F_1(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \tag{11}$$

のことである．ここで $\Re(\cdot)$ は括弧の中の複素数の実部を表す．これは Gauss の積分表示に $x = 1$ を代入したベータ積分をガンマ関数で表して得られる．等式 (11) が接続行列を計算するためにどのように用いられるかを説明しよう．$x = 0$, $x = 1$ における解の基本系として $(f_1^{(0)}, f_2^{(0)})$, $(f_1^{(1)}, f_2^{(1)})$ をとる．

$x = 0$ における正則な解 $f_1^{(0)}$ を $x = 1$ における解 $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}$ を用いて

$$f_1^{(0)}(x) = A f_1^{(1)}(x) + B f_2^{(1)}(x) \tag{12}$$

と表せたとする．A, B は x に依らない定数である．この式において $x = 1$ とおくと，$f_j^{(1)}$ の ${}_2F_1$ を用いた表示および $\Re(c-a-b) > 0$ より $f_1^{(1)}(1) = 1, f_2^{(1)}(1) = 0$ が成り立っているから，右辺 $= A$．一方，左辺は $F(a, b, c; 1)$ であるから，G–K の等式を用いると $A = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$ と求まる．B を求めるには，(12) において $x = 0$ とおく．$f_1^{(1)}(0), f_2^{(1)}(0)$ は再び G–K の等式を用いて計算できる．一方，左辺の値は $f_1^{(0)}(0) = 1$ であるから B を求めることができる．同様にして $f_2^{(0)}$

も $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}$ を用いて表すことができて接続関係式が求まる．G–K の等式は後に述べる Okubo 方程式に対して拡張されている．

3.4 一般化された超幾何方程式

(5) の解の級数表示あるいは積分表示を拡張することによって得られる微分方程式がある．複素パラメータ $a = (a_1, \cdots, a_n), b = (b_1, \cdots, b_{n-1})$ に対して

$$ {}_nF_{n-1}(a, b; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_{n-1})_k k!} x^k $$

を考える．$n = 2$ の場合が Gauss の超幾何関数である．この級数は $|x| < 1$ で収束し，n 階微分方程式

$$ \Big[x^{-1}\vartheta \prod_i (\vartheta + b_i - 1) - \prod_i (\vartheta + a_i)\Big] w = 0 $$

の $w(0) = 1$ を満たす解である．ここで $\vartheta = x\frac{d}{dx}$. これは確定特異点 $\{0, 1, \infty\}$ を持ち，一般化超幾何方程式と呼ばれる．

もう一つの拡張は積分表示の観点からのもので，(8) の代わりに

$$ w(x) = \int u^{\lambda_1}(u-1)^{\lambda_2} \prod_{k=3}^{n+1} (1-t_k u)^{\lambda_k} du \quad (13) $$

を考える．但し，$t_3, \cdots, t_n$ は定数で $t_{n+1} = x$. この関数は $S = \{0, 1, \infty, t_3, \cdots, t_n\}$ に確定特異点を持つ Jordan–Pochhammer 方程式と呼ばれる n 階方程式を満たす．逆に解はこの形の積分で表される．いずれの場合も適当にベクトル値未知関数を定めることにより S 型方程式や 4.2 節において述べる Okubo 方程式と同値となる．(13) において $t_3, \cdots, t_{n+1}$ をすべて変数と考えると，多変数関数への一般化が得られる．これは Lauricella の超幾何関数と呼ばれる．超幾何関数の一般化については拙著[6]も参照していただきたい．

4. アクセサリーパラメータを持たない方程式

4.1 Rigidity

Gauss の方程式のように，特性指数から方程式が決まってしまうようなものがアクセサリーパラメータを持たない方程式である．ここでは，S 型方程式 (2) に対して同様のことを考える．それが rigidity の概念である[4]．

方程式 (2) を与えることは $p+1$ 個の行列の組 $A = (A_1, \cdots, A_{p+1})$ で $A_1 + \cdots + A_{p+1} = 0$ を満たすものを与えることと同じことである．そこで，このような A たちの空間を $\mathcal{F}$ と表し，S 型方程式の空間と同一視する．定数行列 P によって未知関数の変換 $y = Pz$ を行うと z についての方程式が得られるが，それは A_j を $P^{-1}A_jP$ に取り替えたものになる．

定義 $A = (A_1, \cdots, A_{p+1}) \in \mathcal{F}$ が rigid とは $A' = (A'_1, \cdots, A'_{p+1}) \in \mathcal{F}$ で，A_j と A'_j がすべての j について相似なものが任意に与えられたとき，ある $P \in GL(n)$ が存在して $A'_j = P^{-1}A_jP$ $(j = 1, \cdots, p+1)$ が成り立つこと．

$A \in \mathcal{F}$ が rigid であることは，微分方程式の各特異点における情報（特性指数）によって方程式そのものが未知関数の定数行列による変換を除いて定まることを意味する．

$A \in \mathcal{F}$ が既約とは A を線型写像の組と考えたとき，その共通の不変部分空間が自明なもの $\{0\}, \mathbb{C}^n$ 以外にないときとする．

それでは S 型方程式 A が rigid であることをどのように判定したら良いであろうか．実は rigidity 指数というものを計算することによって測ることができる．

定義 $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$ i(A) = \{2 - (p+1)\}n^2 + \sum_{j=1}^{p+1} \dim Z(A_j) $$

を rigidity 指数と言う．ここで $Z(A_j)$ は A_j と可換な行列全体の集合である．

次のことが知られている．

定理 $A \in \mathcal{F}$ が既約ならば, rigidity 指数は $i \leq 2$ を満たす．さらに既約性の下で，A が rigid であることと $i = 2$ であることは同値である．

$2-i(A)$ がアクセサリーパラメータの個数である．例えばGaussに対応するS型方程式のrigidity指数は(6)を用いて簡単に計算できて，a,b,c が一般なら $i(A)=2$ であることが分かる．

Rigidな方程式をすべて求めるアルゴリズムがKatzによって得られ，それを元に，DettweilerとReiter[2]によって線形代数の言葉で実現されている．その主張するところはmiddle convolutionとadditionと呼ばれている操作を繰り返すことによって，階数1のS型微分方程式からすべてのrigidな方程式が構成できるというものである．

4.2 Okubo方程式

S型方程式の中で，大域的性質が良く研究されてきた微分方程式として，大久保謙二郎[8]によって提唱された

$$(xI_n - T)\frac{dy}{dx} = By \tag{14}$$

がある．ここで I_n は n 次単位行列，T は対角行列で，B は n 次定数行列である．これはOkubo方程式と呼ばれ，$T = t_1 I_{n_1} \oplus \cdots \oplus t_p I_{n_p}$ と表したとき，$t_1, \cdots, t_p, t_{p+1} = \infty$ に確定特異点を持つS型方程式と見做すことができる．

Okubo方程式はGaussの超幾何方程式の一般化の一つである．実際，既約でアクセサリーパラメータを含まないOkubo方程式は T と A の固有値の重複度に応じて8種類に分類され[3,8]，解の積分表示を持ち，モノドロミー表現が具体的に計算されている．また，この分類の一部として，3.4節において述べた一般化超幾何方程式とJordan–Pochhammer方程式が含まれている．

5. モノドロミー保存変形とSchlesinger系

これまでは，$A \in \mathcal{F}$ に対してそのモノドロミーを如何に求めるかを問題にした．逆に基本群の表現 $\rho : \pi_1(X, x_0) \to GL(n)$ を与えて，これをモノドロミー表現に持つ $A \in \mathcal{F}$ を求めるという問題が考えられる．有名なRiemann–Hilbert問題である[1,9]．この問題に関連して，(2)の特異点 t を動かしてもモノドロミー群が変化しないものを求めるのがモノドロミー保存変形である．この族はSchlesinger系と呼ばれる非線型方程式

$$dA_j = \sum_{i=1}^{p} [A_i, A_j] d\log(t_i - t_j)$$

で記述される[5,7]．$n=2, p=3$ のときPainlevé VI型方程式[7]と等価である．Painlevé方程式はランダム行列論など様々な数理物理学の問題と関係がある．

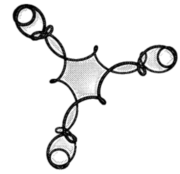
参考文献

1) A.A. Bolibruch and D.V. Anosov; *The Riemann–Hilbert problem*, Vieweg, 1994.
2) M. Dettweiler and S. Reiter; An algorithm of Katz nad its aplication to the inverse Galois problem, *J. Symbolic Comput.* **30**, 2000.
3) Y. Haraoka; Canonical forms of differential equations free from accessary parameters, *SIAM J. Math Anal.* **25**, 1994
4) 原岡喜重；『超幾何関数』，朝倉書店，2002.
5) K. Iwasaki *et al.*; *From Gauss to Painlevé*, Vieweg Verlag, 1991.
6) 木村弘信；『超幾何関数入門』，サイエンス社，2007.
7) 岡本和夫；『パンルヴェ方程式序説』，上智大学講究録.
8) 大久保謙二郎；On the group of Fuchsian equations, 都立大数学教室セミナー報告，1987.
9) 斉藤利弥；Riemannの問題，数学 **12**, 1958.

（きむら・ひろのぶ，熊本大学理学部）

モジュライ入門

数え上げとコンパクト化をめぐって



向井　茂

数学的対象の同値類を要素とする集合に自然な多様体の構造を入れたものをモジュライ空間（moduli space）と言う．点以外のものを要素とする空間の上で幾何を展開することは，射影幾何学における双対性原理やグラスマン多様体にまでさかのぼる．これらを使うことによって，直線や2次曲線等を数える複雑な多くの問題が点の数を数える問題に帰着して解決されてきた．この有用な思考法を育んできたモジュライの先祖たちをまず紹介しよう．次の二定理は双対性原理の良い見本である．

定理 1（パスカル）　平面2次曲線上に頂点 $p_1, \cdots, p_6$ をもつ6角形の向い合う2辺の交点

$$\overline{p_1p_2} \cap \overline{p_4p_5},\quad \overline{p_2p_3} \cap \overline{p_5p_6},\quad \overline{p_3p_4} \cap \overline{p_6p_1} \tag{1}$$

は1直線上にある（図1）．

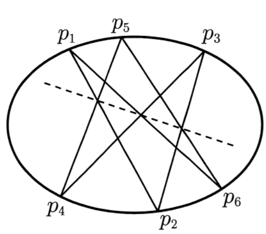


図1　パスカル線．

定理 2（ブリアンション）平面2次曲線に外接する6角形の3本の対角線は1点で交わる（図2）．

射影平面 $\mathbb{P}^2$ の直線全体は再び射影平面をなし，元の $\mathbb{P}^2$ の双対平面と呼ばれる（定義 1）．ここでは $\mathbb{P}^{2,*}$ で表そう．$\mathbb{P}^2$ の点は $\mathbb{P}^{2,*}$ の直線と対応する（$\mathbb{P}^{2,**} = \mathbb{P}^2$）．$\mathbb{P}^2$ の6点 $p_1, \cdots, p_6$ に対応する $\mathbb{P}^{2,*}$ の6直線を $l_1, \cdots, l_6$ としよう．(1) の3点が1直線上にあることは，3直線 $\overline{p_{12}p_{45}}$，$\overline{p_{23}p_{56}}$，$\overline{p_{34}p_{61}}$ が1点で交わることと同値である．ただし，l_i と l_j の交点を p_{ij} とした．

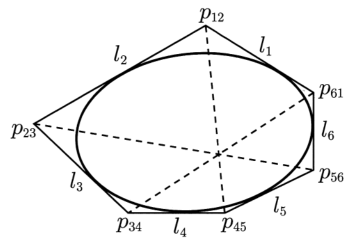


図2　ブリアンション点．

C が $\mathbb{P}^2$ 内の2次曲線のとき，それの接線の全体は $\mathbb{P}^{2,*}$ 内の2次曲線になる．これを $\check{C}$ で表す（第4節の脚注 $*2$ を参照）．点 $p_1, \cdots, p_6$ が C 上にあるとき，対応する6直線 $l_1, \cdots, l_6$ は $\check{C}$ に接する．よって，2つの定理のどちらかを証明しておけば，他はそれと双対性より従う．このような新しい理解の仕方もモジュライの恩恵である．

1. 2つの数え上げ問題

次の問題は古くからよく知られている．

問題 1（アポロニウス）　平面内に3つの円 C_1, C_2, C_3 が与えられたとき，それらのいずれとも接する円はいくつあるか？（図3）

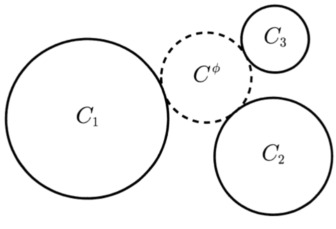


図 3　アポロニウスの問題.

3 つの円に交わりも包含関係もないとする．また, それらは共通接線をもたないとする．このとき, 解答は次のように与えられる．S を $\{C_1, C_2, C_3\}$ の部分集合とする．S に属する円は内部に含み, そうでないものは外にある．そして，3 円と接する円 C^S が一意的に存在する (図 3)．よって，求める答は S の個数，すなわち，$2^3 = 8$ である．

シュタイナー（J. Steiner）は円を 2 次曲線（係数は複素数）に換えて次を考えた.

問題 2（1848 年）　平面 $\mathbb{C}^2$ 内に 5 つの 2 次曲線 $C_1, \cdots, C_5$ が与えられたとき，それらのいずれとも接する 2 次曲線はいくつあるか？

しばらく，この問題へのアプローチを試みよう.

2. 射影空間とその双対

射影直線 $\mathbb{P}^1$ は通常の直線の 1 点コンパクト化である．実数の範囲で考えているときは円周，複素数の範囲で考えているときはリーマン球面である．付加された点 ∞ は無限遠点と呼ばれる.

次に，射影平面 $\mathbb{P}^2$ は通常の平面に $\mathbb{P}^1$ を付加してコンパクト化，射影空間 $\mathbb{P}^3$ は通常の空間に $\mathbb{P}^2$ を付加して，$\cdots$ と帰納的に $\mathbb{P}^n$ が定まっていく．平面のコンパクト化には射影直線 2 個の直積 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ もあるが, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ は「異なる 2 直線は 1 点で交わる」という著しい性質をもつ.

射影空間はベクトル空間 V からも定義される．V から原点を除き，次の同値関係 $\sim$ を入れる.

「2 つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ は互いに他の定数倍になっているとき，$\vec{u} \sim \vec{v}$ とする.」

$V \setminus \{\vec{0}\}$ をこの同値関係 $\sim$ で割ったものが射影空間である．言い換えると, V の原点を通る直線の全体である．V の次元が n のとき，こうして $(n-1)$ 次元射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ が得られる．$\vec{v}$ の同値類を $[\vec{v}] \in \mathbb{P}^{n-1}$ で表そう．V の基底をとって, $\vec{v}$ が数ベクトル ${}^t(a_1, \cdots, a_n)$ でもって表されるとき，点 $[\vec{v}]$ を $(a_1 : \cdots : a_n)$ で表し，$[\vec{v}]$ の斉次座標と呼ぶ.

定義 1　射影空間 $\mathbb{P}$ が $V \setminus \{\vec{0}\}$ を同値関係 $\sim$ で割って得られるとき，双対ベクトル空間 V^* から同じように得られる射影空間 $\mathbb{P}^*$ を $\mathbb{P}$ の双対と言う.

n 変数の斉次多項式 $F(x_1, \cdots, x_n)$ の $\mathbb{P}^{n-1}$ における零点集合 S を超曲面（$n = 4, 3$ のときは, 曲面，曲線）と言う．また, F の次数を S の次数と呼び, $\deg S$ で表す．1 次の超曲面は超平面と言う．双対 $\mathbb{P}^*$ は $\mathbb{P}$ の超平面のモジュライである.

3. 2 つの数え上げ問題(続)．7776 個か？

射影空間は幾何的対象のパラメータ空間やそのコンパクト化としてしばしば，そして，自然に出現する．以下，すべて複素数係数で考える.

まず，xy 平面内の円

$$x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

の全体を考えよう．それらは (d, e, f) を座標とする空間 $\mathbb{C}^3_{(d,e,f)}$ でパラメータ付けられる．正確に言うと $d^2 + e^2 - f \neq 0$ なる領域であるが, $d^2 + e^2 - f = 0$（半径 0）も「円」の仲間に入れておく.

$\mathbb{C}^3_{(d,e,f)}$ をコンパクト化するには，曲線の族

$$a(x^2 + y^2) + 2dx + 2ey + f = 0, \qquad (2)$$

$(a, d, e, f) \neq (0, 0, 0, 0)$, を考えればよい．$(a : d : e : f)$ を斉次座標とする射影空間 $\mathbb{P}^3_{(a:d:e:f)}$ が自然なコンパクト化で, 付け加わった射影平面 $(a = 0)$ は「半径無限大の円」をパラメータ付けている.

この $\mathbb{P}^3_{(a:d:e:f)}$ を使って問題 1 を再考しよう．円 C を一つ固定したとき，それと接する「円」(2) の軌跡を $Q(C) \subset \mathbb{P}^3_{(a:d:e:f)}$ とする．$Q(C)$ は 2 次曲面である．例えば，$Q(x^2 + y^2 = 1)$ は

$(a+f)^2-4d^2-4e^2=0$ で定義される．求める数は交わり $Q(C_1)\cap Q(C_2)\cap Q(C_3)$ の元の個数で，ベズーの定理（後述）より，重複度を勘定して，2^3 に等しい．

問題 2 も同じように考えてみよう*1)．2 次曲線

$$C : ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \quad (3)$$

の全体は 5 次元射影空間 $\mathbb{P}^5_{(a:\cdots:f)}$ でパラメータ付けられる．可約，すなわち，定義式が 1 次式の積に分解する 2 次曲線の軌跡 $\mathcal{D}\subset\mathbb{P}^5_{(a:\cdots:f)}$ は，(3) に対応する 3 次対称行列を $A=\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f\end{pmatrix}$ とおくとき，$\det A=0$ で定義される．C が 2 次曲線

$$C' : a'x^2+2b'xy+c'y^2+2d'x+2e'y+f'=0 \quad (4)$$

と接するのは 2 次曲線 $(3)+t(4)=0$ が可約になるための t に関する方程式

$$\det\left[\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} a' & b' & d' \\ b' & c' & e' \\ d' & e' & f'\end{pmatrix}\right]=0 \quad (5)$$

が重解をもつことと同値である．3 次方程式 $a_0t^3+a_1t^2+a_2t+a_3=0$ の判別式は

$$27a_0^2a_3^2-a_1^2a_2^2-9a_0a_1a_2a_3+4a_1^3a_3+4a_0a_1^3$$

であるから，求める条件は $a,\cdots,f$ に関して斉次 6 次式．よって，C' と接する 2 次曲線の軌跡 $S(C')$ は $\mathbb{P}^5_{(a:\cdots:f)}$ 内の 6 次超曲面である．求める数は交わり $S(C_1)\cap\cdots\cap S(C_5)$ の個数で，「ベズーの定理より，重複度を考慮すれば，$6^5=7776$ に等しい．」

4. 完全 2 次曲線が正解を与える

直前の主張は実は誤りである．意欲的な読者はどこが間違いか自分で考えてみよ．使った定理を正確に述べることで間違いが発見できる．

定理 3（ベズー） n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ の n 枚の超曲面 $S_1,\cdots,S_n$ の交わり $S_1\cap\cdots\cap S_n$ が有限であるとする．このとき，交点の個数は，重複度を勘定に入れると，次数の積 $\prod_{i=1}^n \deg S_i$ に等しい．

問題 1 の場合の 3 枚の 2 次曲面の交わりは有限だったが，いま問題としている 5 枚の 6 次超曲面の交わりは 2 次曲線の族 (3) の中に 2 重直線

$$(\alpha x+\beta y+\gamma)^2=0 \quad (6)$$

が入っているため有限でない．実際，C が 2 重直線のとき，方程式 (5) は $t=0$ を重解としてもつ．よって，前節の意味で，すべての 2 次曲線 C' と接し，問題としている交わりに属する．

問題 2 に対する前節のアプローチはまだ途半ばである．これを妨害しているのは，(6) の全体，すなわち，射影平面からパラメータ空間への写像

$$\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^5_{(a:\cdots:f)},\ (\alpha:\beta:\gamma)\mapsto(\alpha^2:\alpha\beta:\cdots:\gamma^2)$$

の像 V（ベロネーゼ曲面と呼ばれる）である．$\mathbb{P}^5_{(a:\cdots:f)}$ において，V を別のもので取り替えた新しい「モデル」に移ることによって，$S(C_1),\cdots,S(C_5)$ の交わりを有限個にできる．

2 つの 5 次元射影空間（互いに双対）の直積 $\mathbb{P}^5_{(a:\cdots:f)}\times\mathbb{P}^5_{(a^*:\cdots:f^*)}$ の中で，対称行列の積

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & b^* & d^* \\ b^* & c^* & e^* \\ d^* & e^* & f^*\end{pmatrix}$$

が定数行列（単位行列の定数倍）となるような点

$$((a:b:c:d:e:f),(a^*:b^*:c^*:d^*:e^*:f^*))$$

の全体 $\mathcal{C}$ がこの「モデル」である．$\mathcal{C}$ は非特異で，第 1 射影 $\mathcal{C}\to\mathbb{P}^5_{(a:\cdots:f)}$ は V の外で同型である．実際，V を中心とする爆発 (blow up) になっている．また，可約 2 次曲線の軌跡 $\mathcal{D}$ の逆像は V の逆像 $\mathcal{D}_2$ ともう一つの閉集合 $\mathcal{D}_1$（$\mathcal{D}$ の強変換）の和である．$\mathcal{D}_1$ は $\mathcal{D}$ の特異点解消を与えている．

この「モデル」$\mathcal{C}$ は 2 次曲線（平面とその双対に属する）の対 (C,C^*) でもって次のいずれかを

*1）文献 1) 所収の S.L. Kleiman の論文を参考にした．

みたすものをパラメータ付けている[*2)]．これらは完全２次曲線（complete conic）と呼ばれる．

1. C, C^* はともに既約で，互いに他の双対になっている（$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ の補集合）．

2. C は異なる２直線の和，C^* は２重直線で，その台は２直線の交点に対応する（$\mathcal{D}_1$ の部分）．

3. 上の逆（$\mathcal{D}_2$ の部分）．

4. C, C^* はともに２重直線で，C の台に対応する点は C^* 上にある（$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ の部分）．

$\mathcal{C}$ だけでなく $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ も非特異で，両者は横断的に交わっている．このように，完全２次曲線のモジュライ $\mathcal{C}$ は既約２次曲線の全体 $\mathbb{P}^5 \setminus \mathcal{D}$ を境界が非特異因子の正規交叉な和になるようにコンパクト化している．（等質空間 $SL(3)/SO(3)$ の同変コンパクト化であることも重要である．）

問題２の解法の残りは２つの部分よりなる．一つは，完全２次曲線のモジュライの「(a,b) 次の超曲面」５枚の交点数は

$$a^5 + 2\binom{5}{1}a^4b + 4\binom{5}{2}a^3b^2 + 4\binom{5}{3}a^2b^3 + 2\binom{5}{4}ab^4 + b^5$$

で与えられるというベズーの定理の拡張．もう一つは，各 $S(C_i)$ の強変換が「$(2,2)$ 次の超曲面」であることを計算で示すことである．両者を合わせて，答が

$$2^5\left\{1 + 2\binom{5}{1} + 4\binom{5}{2} + 4\binom{5}{3} + 2\binom{5}{4} + 1\right\}$$ [*3)],

すなわち，3264 個と求まる．

5. グラスマン多様体とカタラン数

$\mathbb{P}^2$ 内の直線の全体は（双対）射影平面で，$\mathbb{P}^3$ 内の平面の全体は（双対）射影空間でパラメータ付けられる．では，射影空間内の直線の全体はどうだろう？ その答が表題の多様体である．$(n-1)$ 次元射影空間の中の直線 $l \subset \mathbb{P}^{n-1}$ に対して，その上の２点 $(a_1 : \cdots : a_n), (b_1 : \cdots : b_n)$ をとり，$2 \times n$ 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ を作る．これの２次小行列式を並べて射影空間（次元は $\binom{n}{2}-1$）の点と見なしたものを l のプリュッカー（Plücker）座標と言う．直線のプリュッカー座標の全体はこの大きな射影空間の中で，$(2n-4)$ 次元の（非特異）多様体をなす．これが，（直線の）グラスマン多様体で，ここでは $G(2,n)$[*4)] で表す．

$n=4$ が最初の非自明な場合で，$l \subset \mathbb{P}^3$ のプリュッカー座標（６個）は有名な恒等式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

をみたす．これより，$G(2,4) \subset \mathbb{P}^5$ は２次超曲面

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0 \tag{7}$$

である．

グラスマン多様体は次の問題に源をもつ．以下，複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える．

> **問題 3**　３次元空間内の一般の位置にある４本の直線 $m_1, m_2, m_3, m_4 \subset \mathbb{P}^3$ が与えられたとき，それらのいずれとも交わる直線 l は何本あるか？

直線 m を固定したとき，それと交わる直線の軌跡は，点 $[m]$ における $G(2,4)$ の接超平面 $T(m)$ と $G(2,4)$ の交わりである．よって，$\mathbb{P}^5$ での交わり

$$T(m_1) \cap T(m_2) \cap T(m_3) \cap T(m_4) \cap G(2,4)$$

の個数が求めるべき数である．４直線が一般の位置[*5)]にあるとき，交わりは有限で，個数は，重複度を込めると，定義式 (7) の次数２に等しい．

では，一般の n に対して $G(2,n)$ の次数はいく

*2)　(3) が既約なとき，双対２次曲線（接線の軌跡）$\check{C}$ に対応する対称行列は C のそれの逆行列であることに注意しよう．

*3)　係数に現れる $1, 2, 4$ は，それぞれ，５点を通る２次曲線，４点を通り１本の直線に接する２次曲線，３点を通り２本の直線に接する２次曲線の個数である．

*4)　n 次元ベクトル空間内の２次元部分空間全体という意味．

*5)　具体的には，４直線のどの３つも共通点がなく，どの３つも同一平面に含まれない，そして，すべてを含む２次曲面が存在しない．

つであろうか？ 次数とは，次元 ($\dim = 2n-4$) 個の一般の超平面 $H_1, \cdots, H_{\dim}$ で切ってできる集合 $H_1 \cap \cdots \cap H_{\dim} \cap G(2,n)$ の個数である．これは次の問題の答を与える（$n=4$ が問題 3).

> **問題 4**　$(n-1)$ 次元空間内に，一般の位置にある $(2n-4)$ 個の余次元 2 部分空間 $m_1, \cdots, m_{2n-4} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ が与えられたとき，それらのいずれとも交わる直線 l は何本あるか？

答はカタラン (Catalan) 数 $c_{n-2} := \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$ で，括弧の付け方や円卓での握手の仕方等いろいろな見方がある面白い数である[2, 第4章]．

ここでは，複素グラスマン多様体 $G(2,n)$ のコホモロジー環 $H^*(G(2,n), \mathbb{Z})$ の構造を使ってこの数を導き出そう．この環は，次数 2, 4 の 2 つの元 α, β で生成される．それぞれ，超平面切断と自然に入る $G(2,n-1) \subset G(2,n)$ の基本類のポアンカレ双対で，後者に対しては $(\beta^{n-2}) = 1$ が成立する．

> **命題 1**　$G(2,n)$ のコホモロジー環は，2 変数多項式環 $\mathbf{Z}[A,B]$ の，$s_{n-1}(A,B)$ と $s_n(A,B)$ で生成されるイデアルによる剰余環
>
> $$\mathbf{Z}[A,B]/(s_{n-1}(A,B), s_n(A,B))$$
>
> と同型である．ただし，$s_n(A,B)$ はベキ級数展開
>
> $$\frac{1}{1-At+Bt^2} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A,B)t^n$$
>
> で定義される A, B の多項式である（A, B の剰余類が α, β である).

$s_n(A,B)$ は初期条件 $s_0 = 1, s_1 = A$ と漸化式 $s_{n+1} - As_n + Bs_{n-1} = 0$ でもって容易に求まる．例えば，

$$s_2 = A^2 - B, s_3 = A^3 - 2AB, s_4 = A^4 - 3A^2B + B^2$$

である．漸化式より得られる $A^4s_2 = A^3s_3 + A^3s_1B$ 等を図 4（左）のハッセ図に適用して，

$$A^6 \equiv 5B^3 \mod (s_4(A,B), s_5(A,B)).$$

よって，$\deg G(2,5) = (\alpha^6) = 5(\beta^3) = 5$ を得る．この数 $5(=c_3)$ は，パスカル 3 角形の規則で作られる*6) 図 4（右）の左端に現れる．左端の数列がカタラン数 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ であることを確かめるのはちょっとした頭の体操だろう．

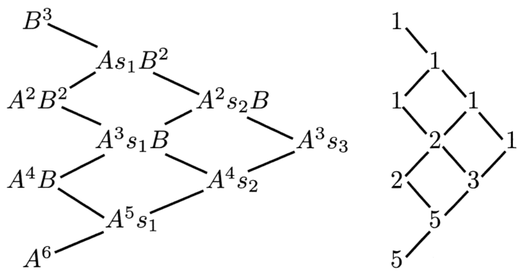


図 4　$G(2,5)$ のコホモロジー．

ミラー対称性[3]で有名な $\mathbb{P}^4$ 内の 5 次超曲面 S_5 に含まれる直線の個数が，命題 1（$n=5$）を使って $25\{24(\alpha^4\beta) + 58(\alpha^2\beta^2) + 9(\beta^3)\} = 2875$ と求まる．さらに，第 4 節の考え方と合わせることによって，$S_5 \subset \mathbb{P}^4$ 内の 3 次有理曲線の本数が求められている（Ellingsrud–Strømme).

6. 点付射影直線，表現空間とジグザグ数

現代数学でのモジュライを 2 つ紹介しよう．

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の射影直線 $\mathbb{P}^1$ とその上の相異なる n 点の組 $(\mathbb{P}^1 : p_1, \cdots, p_n)$ を n 点付射影直線と言う．これが，もう一つの n 点付射影直線 $(\mathbb{P}^1 : p'_1, \cdots, p'_n)$ と同型であるのは，1 次分数変換

$$\varphi\colon z \mapsto (az+b)/(cz+d), \quad ad - bc \neq 0$$

でもって，$\varphi(p_i) = p'_i$ がすべての $i = 1, \cdots, n$ に対して成立するものが存在することと定める*7)．

相異なる 3 点 $p, q, r \in \mathbb{P}^1$ に対して

$$\varphi(p) = 0, \quad \varphi(q) = 1, \quad \varphi(r) = \infty$$

をみたす 1 次分数変換 φ が一意的に定まる．よって，n 点付射影直線は $(\mathbb{P}^1 : p_1, \cdots, p_{n-3}, 0, 1, \infty)$ と正規化できる．よって，n 点付射影直線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,n}$ は $\mathbb{C}^{**} := \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の $(n-3)$ 個の直積からすべての対角線 Δ_{ij} を除いた部分 $(\mathbb{C}^{**})^{n-3} \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n-3} \Delta_{ij}$ である．

モジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,n}$ のコンパクト化について

*6)　上両隣りにある 2 つの数の和を書き入れる．
*7)　より正確には順序付けられた n 点付射影直線．

少し述べよう．上の表示より，$\mathbb{P}^{n-3}$ や $(\mathbb{P}^1)^{n-3}$ はそのコンパクト化である．また，それらに代数的，幾何的な意味を付けることができる．しかし，一つを選ぶとすれば，n 点付安定曲線によるものが最も優れている．

定義 2 n 点付曲線 $(X : p_1, \cdots, p_n)$ は次の条件をみたすとき，種数 0 の n 点付安定曲線と言う．

1. X は連結かつ単連結．既約成分はすべて射影直線 $\mathbb{P}^1$ である．
2. n 点 $p_1, \cdots, p_n \in X$ はすべて異なる．また，どれも X の既約成分の交点ではない．
3. X のどの既約成分も，$p_1, \cdots, p_n$ と既約成分の交点の合併から少なくとも 3 点を含む．

これらのモジュライ空間 $\tilde{\mathcal{M}}_{0,n}$ は非特異な射影多様体になる．$n=4$ の場合は，次の 3 つでモジュライ $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{C}^{**}$ がコンパクト化されて $\mathbb{P}^1$ になる．

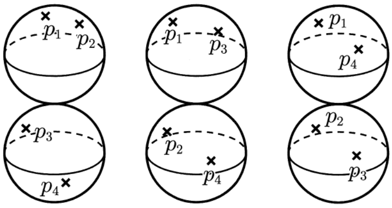


図 5　4 点付安定曲線．

単に非特異なだけでなく，境界 $\tilde{\mathcal{M}}_{0,n} \setminus \mathcal{M}_{0,n}$ は，完全 2 次曲線のモジュライ空間のように，非特異因子の正規交叉な和になっている．また，$\tilde{\mathcal{M}}_{0,n}$ は，（複素）グラスマン多様体 $G(2,n)$ の $n-1$ 次元トーラス $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ の作用によるある種の商とも一致する（M. Kapranov）．

n 点付射影直線 $(\mathbb{P}^1 : p_1, \cdots, p_n)$ の内部，すなわち，穴空き Riemann 球面 $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \cdots, p_n\}$ の基本群 π_1 の表現空間について最後に紹介する．p_i を小さくまわる閉道を t_i とするとき，π_1 は $t_1, \cdots, t_{n-1}$ で生成される自由群である（関係 $\prod_{i=1}^n t_i = 1$ に注意）．2 次特殊ユニタリ群への準同型写像

$$\rho : \pi_1 \to SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

を π_1 の 2 次特殊ユニタリ表現と言う．2 つの表現 ρ, ρ' は，すべての $\gamma \in \pi_1$ に対して $\rho'(\gamma) = g\rho(\gamma)g^{-1}$ をみたす特殊ユニタリ変換 $g \in SU(2)$ が存在するとき，同値であると定める．

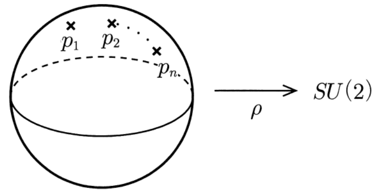


図 6　基本群の表現．

このとき，2 次特殊ユニタリ表現のモジュライ空間 $\tilde{\mathcal{N}}_{0,n}$ は $SU(2)$ の $(n-1)$ 個の直積を $SU(2)$ の対角的共役作用で割ったもので，実 $(3n-6)$ 次元の微分多様体である．次に，写像

$$\tilde{\mathcal{N}}_{0,n} \to \mathbb{R}^n, \rho \mapsto (\mathrm{Trace}\, \rho(t_1), \cdots, \mathrm{Trace}\, \rho(t_n))$$

の原点の逆像を $\mathcal{N}_{0,n}$ で表す．これは，$\rho(t_i)$ の位数がすべて 4 であるような 2 次特殊ユニタリ表現のモジュライ空間である．$\mathcal{N}_{0,n}$ には，$(\mathbb{P}^1 : p_1, \cdots, p_n)$ 上の安定放物的ベクトル束との対応を使って射影多様体（複素次元 $n-3$）の構造を入れることができる．

グラスマン多様体のカタラン数にあたるものとして，モジュライ空間 $\mathcal{N}_{0,n}$ にはジグザグ数 E_n *8) が次のように現れる．

命題 2[4, Chap. 12] $\mathcal{N}_{0,n}$ の第 1 チャーン類の自己交点数 $(c_1(\mathcal{N}_{0,n})^{n-3})$ は $2^{n-3}E_{n-3}$ に等しい．

ジグザグ数にもいくつかの表示があるが，例えば，

$$E_n = \frac{n!2^{n+2}}{\pi^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)j}}{(2j+1)^{n+1}}$$

とゼータ的に表され，ハッセ図を使っても求まる．

*8) この名称については文献 2) を見よ．E_n はオイラーに因む．

参考文献

1) A. Seidenberg, ed., *Studies in Algebraic Geometry*, Math. Assoc. Amer., 1980, pp.117–138.
2) J.H. コンウェイ，R.K. ガイ，根上成也訳：『数の本』，シュプリンガー・ジャパン，2001 年．
3) S-T. Yau, ed., *Essays on Mirror Manifolds*, Int'l. Press, 1992.
4) S. Mukai: *An introduction to invariants and moduli*, Cambridge Univ. Press, 2003.

（むかい・しげる，京都大学数理解析研究所）

Quiverの表現

多元環の表現論

浅芝　秀人

1. はじめに

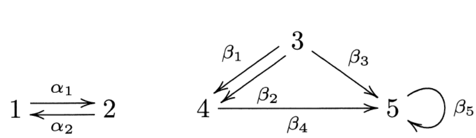
Quiverとは，有向グラフ（oriented graph）に他ならない．初めてこの言葉（原論文[4]ではドイツ語のKöcher）を用いたのはGabrielである．わざわざ異なる言葉を使ったのは，“有向グラフ”を1つの単語で，紛れなく表したかったからであろうと思われる．“Graph”という単語は，“無向グラフ”，“関数のグラフ”あるいは“棒グラフ”などいろいろな意味をもっているため，この目的には使えない．

Quiverのもとの意味は，矢を入れる筒，矢筒である．矢筒に矢が何本か入っている様子をもって，有向グラフを表すことにしたわけである．Quiver varietyの訳語として箙多様体の語が使われて以来，訳語として“箙”がよく使われている[*1)]．他にも数学辞典第4版では，カナで“クイバー”と音訳している．ちょうど，graphを“グラフ”と音訳したように．用語を変えずに，有向グラフと訳すときもある．訳語はまだ一定していないように思われるので，ここでは英語のままquiverの語を用いる[*2)]．

Quiverは点と点を矢で結んで，それらの間の関係を図示するものとして，数学に限らずいろいろな場面で用いられている．ここでは，quiverそれ自身の組合せ論的な取扱いとは異なる，quiverの**表現**というものを紹介する．後で見るように，quiverは多元環の構造を表し，quiverの表現はその多元環上の加群を表すことになる．以下，kを体とする．（体という言葉に不慣れな読者は，kを複素数の全体$\mathbb{C}$と思って読み進めてよい.）k上のベクトル空間を単にベクトル空間と呼び，k上の多元環を単に多元環と呼ぶ．有限次元ベクトル空間とその間の線形写像全体のなす圏を$\mathrm{mod}\,k$で表す．（圏については，この特集の第2の話題，「圏と関手」を参照.）

2. Quiverの定義

この節では，quiverの数学的な定義を与える．まず例を見よう：



この図のように，quiverは「点と点を矢で結んだもの」である．構成物の最初のものとして，点（vertex）全体の集合$Q_{\mathbf{v}}$が考えられる．この例では，$Q_{\mathbf{v}} := \{1,2,3,4,5\}$である．次に，矢（arrow）全体の集合$Q_{\mathbf{a}}$がある．この例では，$Q_{\mathbf{a}} := \{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5\}$である．矢がどの点とどの点を結びつけているかは，矢の尾に

*1) 矢入具を表す言葉は日本語にも古くから，靫，靭（ゆぎ），胡祿（やなぐい），箙（えびら）など多くの言葉があった．古語辞典の絵を見ると“箙”より“靫”のほうが矢筒に近いが，箙のほうが外から矢がよく見えてよい．

*2) 個人的には，単に矢筒と訳せばよいと思うのだが．

当たる点と矢の頭に当たる点を指定すれば決まる．したがって残る構成物としては，各矢 α に対してその尾（tail）$\mathbf{t}(\alpha)$ と頭（head）$\mathbf{h}(\alpha)$ を対応させる 2 つの写像 $\mathbf{t}, \mathbf{h}\colon Q_{\mathbf{a}} \to Q_{\mathbf{v}}$ がある．この例では，$\mathbf{t}, \mathbf{h}$ は次の表で与えられる．

α	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$\mathbf{t}(\alpha)$	1	2	3	3	3	4	5
$\mathbf{h}(\alpha)$	2	1	4	4	5	5	5

以上 4 つの構成物を与えれば，quiver が 1 つ決まる．そこで，数学的には次のように定義する．

定義 2.1 2 つの集合 $Q_{\mathbf{v}}, Q_{\mathbf{a}}$ と 2 つの写像 $\mathbf{t}, \mathbf{h}\colon Q_{\mathbf{a}} \to Q_{\mathbf{v}}$ の 4 つ組 $Q := (Q_{\mathbf{v}}, Q_{\mathbf{a}}, \mathbf{t}, \mathbf{h})$ を **quiver** という．$Q_{\mathbf{v}}$ を Q の**点集合**，$Q_{\mathbf{a}}$ を Q の**矢集合**，$Q_{\mathbf{v}}$ の元を Q の**点**，$Q_{\mathbf{a}}$ の元を Q の**矢**と呼び，Q の各矢 α に対して，$\mathbf{t}(\alpha)$, $\mathbf{h}(\alpha)$ をそれぞれ α の**尾**，**頭**と呼ぶ．尾と頭の一致する矢を**ループ**と呼ぶ．

逆に上の意味の quiver Q から，$Q_{\mathbf{v}}$ の元を点として表示し，$Q_{\mathbf{a}}$ の各元 α を矢 $\mathbf{t}(\alpha) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{h}(\alpha)$ として描けば，図としての有向グラフが得られる．

$Q_{\mathbf{v}}$ や $Q_{\mathbf{a}}$ として，集合とは限らないクラスも認めることもある．そうすると，合成を忘れることによって，圏も quiver とみなせる．例えば，有限次元ベクトル空間の圏 $\operatorname{mod} k$ は，$(\operatorname{mod} k)_{\mathbf{v}} :=$（有限次元ベクトル空間の全体），$(\operatorname{mod} k)_{\mathbf{a}} :=$（有限次元ベクトル空間の間の線形写像の全体）各線形写像 $f\colon X \to Y$ に対して $\mathbf{t}(f) := X, \mathbf{h}(f) := Y$ と定義することによって得られる巨大な quiver であると考えることができる*3)．点集合も矢集合も有限であるとき，その quiver は**有限**であるという．また，どの点についても，その点を尾あるいは頭とする矢の数が有限のとき，その quiver は**局所有限**であるという*4)．どの点からどの点へも矢をたどって（矢の向きに逆行してもよい）移動できるとき，その quiver は**連結**であるという．どの quiver Q も連結 quivers（Q の**成分**）の共通点のない合併として書ける．上の例は，連結ではなく，2 つの連結成分からなる．

次に圏の間の関手に相当する概念を定義する．

定義 2.2 Q, Q' を quiver とする．2 つの写像 $f_{\mathbf{v}}\colon Q_{\mathbf{v}} \to Q'_{\mathbf{v}}$ と $f_{\mathbf{a}}\colon Q_{\mathbf{a}} \to Q'_{\mathbf{a}}$ の組 $f = (f_{\mathbf{v}}, f_{\mathbf{a}})$ が尾と頭を保つとき，すなわち，Q の各矢 $x \xrightarrow{\alpha} y$ を矢 $f_{\mathbf{v}}(x) \xrightarrow{f_{\mathbf{a}}(\alpha)} f_{\mathbf{v}}(y)$ に移すとき，f を Q から Q' への**射**と呼び，記号 $f\colon Q \to Q'$ で表す．射 f は，$f_{\mathbf{v}}, f_{\mathbf{a}}$ ともに 1 対 1 であるとき，**同型**と呼ばれる．同型 $f\colon Q \to Q'$ が存在するとき，Q と Q' は**同型**であるという．

簡単に，$f(t) := f_{\mathbf{v}}(t)$ $(t \in Q_{\mathbf{v}})$, $f(t) := f_{\mathbf{a}}(t)$ $(t \in Q_{\mathbf{a}})$ と書き*5)，f を $(f(x), f(\alpha))_{x \in Q_{\mathbf{v}}, \alpha \in Q_{\mathbf{a}}}$（あるいは短く，$(f(x), f(\alpha))_{x,\alpha}$）で表示する．射の例を 1 つ挙げておく．

$$Q\colon\ 1 \xrightarrow{\alpha} 2,\quad Q'\colon\ 3 \xrightarrow{\beta} 4 \xleftarrow{\gamma} 5 \circlearrowright \delta$$

とし，$f = (f(1), f(2), f(\alpha)) := (5, 5, \delta)$ とおくと，$f\colon Q \to Q'$ は射であるが，同型ではない．

3. Quiver の表現

一般に，未知のもの X を，分かりやすい同種のものに関係づけることを X の**表現**という．分かりやすい（計算できる）quiver として，$\operatorname{mod} k$ をとり，関係づける方法として，quiver の射を用いることにより，次の定義が得られる．

定義 3.1 有限 quiver Q の k 上の**表現**とは，quiver の射 $V\colon Q \to \operatorname{mod} k$ のことである．すなわち，Q の各点 x に（有限次元）ベクトル空間 $V(x)$ を対応させ，各矢 $x \xrightarrow{\alpha} y$ に線形写像

*3) このようなものは，もはや有向グラフとして図示することはできないが，quiver として捉えることができる．その意味で，quiver は，「理想上の有向グラフ」であるといえる．

*4) 後で登場する AR–quiver を考えるときは，有限でない quiver も扱わなければならなくなる．幸い，AR–quiver は局所有限にはなっている．

*5) 容易に分かるように，$Q_{\mathbf{v}} \cap Q_{\mathbf{a}} \neq \emptyset$ であったとしても，Q に同型な quiver Q' を作って，$Q'_{\mathbf{v}} \cap Q'_{\mathbf{a}} = \emptyset$ となるようにできる．したがって一般性を失うことなく，$Q_{\mathbf{v}} \cap Q_{\mathbf{a}} = \emptyset$ と仮定できる．すると，このように簡単に書いても混乱は生じない．

$V(\alpha)\colon V(x) \to V(y)$ を対応させるものである．次元の和 $\sum_{x\in Q_\mathrm{v}} \dim V(x)$ を V の**次元**（0 次元表現を 0 で表す）といい，$\dim V$ で表す．また，次元の列 $(\dim V(x))_{x\in Q_\mathrm{v}}$ を V の**次元ベクトル**という．

例 3.2 **(1)** Quiver A_2 : $1 \xrightarrow{\alpha} 2$ の表現 V は，線形写像 $V(1) \xrightarrow{V(\alpha)} V(2)$ で与えられる．例えば，$k \xrightarrow{1} k$, $k \xrightarrow{0} 0$, $0 \xrightarrow{0} k$. これら 3 つの表現をそれぞれ P_1, S_1, S_2 とおく．これらの次元ベクトルはそれぞれ $(1,1),(1,0),(0,1)$ となる．P_1, S_1, S_1, S_2 を直和して，表現の直和 $P_1 \oplus S_1^{(2)} \oplus S_2$ が考えられる（次の図式の上のほうの線形写像で与えられる表現で，$1\oplus 0\oplus 0\oplus 0$ は $1,0,0,0$ をこの順に対角成分とする対角行列）.

$$\begin{array}{ccc} k\oplus k\oplus k\oplus 0 & \xrightarrow{1\oplus 0\oplus 0\oplus 0} & k\oplus 0\oplus 0\oplus k \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ k\oplus k\oplus k & \xrightarrow[\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}]{} & k\oplus k. \end{array}$$

すぐに分かるように，この図式が可換となるようなベクトル空間の間の同型 f_1, f_2 が存在する．この図式の下のほうの線形写像で与えられる表現を V とおくと，この意味で V は $P_1 \oplus S_1^{(2)} \oplus S_2$ と同じもの（同型）といえる．

行基本変形と列基本変形による行列の標準形を考えれば，A_2 のどのような表現も，同型の違いを無視すると，P_1, S_1, S_2 の有限個の直和として $P_1^{(a)} \oplus S_1^{(b)} \oplus S_2^{(c)}$ $(a,b,c \geqq 0)$ の形に一意的に書けることが分かる．

(2) Quiver L_1 : $1 \circlearrowright \alpha$ の表現 V は線形変換 $V(1) \xrightarrow{V(\alpha)} V(1)$ で与えられる．例えば，自然数 n と $c \in k$ に対して，Q の表現 $J(n,c)$ が次のように定義できる．$J(n,c)(1) := k^n$ とし，$J(n,c)(\alpha)$ は，c を固有値に持つ n 次ジョルダン細胞による線形変換とする．この quiver の場合，表現 V と W が同型であるとは，$fV(\alpha) = W(\alpha)f$ となる同型 $f\colon V(1) \to W(1)$ が存在することを意味する．すなわち，$V(\alpha)$ の表現行列と $W(\alpha)$ の表現行列が同値であるということである．すると，k が代数的閉体である場合（例えば，$k = \mathbb{C}$ のとき），ジョルダン標準形の理論から，quiver L_1 のどの表現も，直和の順序と同型の違いを除いて，これら $J(n,c)$ の形の表現の有限個の直和の形に，一意的に書けることが分かる．

Quiver の表現の間の相互関係を調べるために，それらの間の射という概念を用いる．

定義 3.3 Q を quiver とし，V, W をその表現とする．線形写像 $f_x\colon V(x) \to W(x)$ $(x \in Q_\mathbf{v})$ の族 $f = (f_x)_{x\in Q_\mathbf{v}}$ が，Q の各矢 $x \xrightarrow{\alpha} y$ に対して次の図式を可換にするとき，f を V から W への**射**と呼ぶ*6)．（例 3.2 (1) の図式参照）：

$$\begin{array}{ccc} V(x) & \xrightarrow{V(\alpha)} & V(y) \\ {\scriptstyle f_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_y} \\ W(x) & \xrightarrow[W(\alpha)]{} & W(y) \end{array}$$

（すなわち（重複を込めて），射は，点の個数だけの線形写像からなり，矢の個数だけの条件をみたす．）すべての f_x が同型のとき，射 f を**同型**と呼ぶ．同型 $f\colon V \to W$ が存在するとき，V と W は**同型**であるといい $V \cong W$ で表す．

次に例 3.2 (1) で見たように，新しい表現を作り出す方法として，直和を定義する．

定義 3.4 Q を quiver とし，$V = (V_x, V_\alpha)_{x,\alpha}$ と $W = (W_x, W_\alpha)_{x,\alpha}$ を Q の表現とする．

(1) それらの**直和** $V \oplus W$ を次で定義する：
$V \oplus W := (V_x \oplus W_x, V_\alpha \oplus W_\alpha)_{x\in Q_\mathbf{v}, \alpha\in Q_\mathbf{a}}$.

(2) V が，0 でない表現の直和の形に書けないとき，すなわち，$V \cong V_1 \oplus V_2$ ならば，$V_1 = 0$ または $V_2 = 0$ となるとき，V を**直既約**と呼ぶ．

Quiver Q の表現全体とその間の射の全体は圏 $\mathrm{rep}_k\, Q$ をなす．Quiver の表現論での主要な目標

*6) 表現は quiver の射として関手に相当するので，表現の間の射は，自然変換に相当する．

は，与えられた quiver Q に対して，その表現の圏 $\mathrm{rep}_k Q$ を求めることにある．例 3.2 で見たように，これは，quiver A_2 と L_1 については解ける（射の全体も分かる）．A_2 では，直既約表現は全部で（同型を除いて）P_1, S_1, S_3 の 3 個あり，L_1 では，$\{J(n,c) \mid n \in \mathbb{N}, c \in k\}$ と無限個ある．いずれの場合でも，**任意の表現が直既約表現の直和として，順序と同型を除いて，一意的に表せる**．このことは一般の場合でも成り立つことが知られている（Krull–Schmidt の定理）．この定理により，主要問題は次の形になる．

問題 1　与えられた quiver の直既約表現をすべて求めよ．可能ならもっと詳しく，それらとそれらの間の射全体からなる圏 $\mathrm{ind}_k Q$ を求めよ．

直既約表現が同型を除いて有限個しかないとき，その quiver は**有限表現型**を持つといい，そうでないとき**無限表現型**を持つという．容易に分かるように，quiver が有限表現型を持つためには，そのすべての連結成分がそうなっていることが必要十分である．したがって，連結 quiver がいつ有限表現型を持つのかが問題になる．解答は次で与えられる．

定理 3.5（Gabriel[4]）　連結 quiver Q が有限表現型を持つためには，Q が A, D, E 型の Dynkin グラフの辺を適当な向きの矢に取り替えてできた quiver になっていることが必要十分である．そのとき，Q の直既約表現の同型類と，次元ベクトルはともに，その Dynkin グラフに対応する単純リー代数の正ルートと 1 対 1 に対応する*7)．

*7)　この定理が発端となって，リー代数や量子群を，quiver の表現からなる集合に演算を入れることによって実現する，という研究が始まった[7]．他方，この定理の Bernstein, Gelfand, Ponomarev[3]（日本語の解説[6]）による別証明から，**鏡映関手**の概念が生まれ，この関手が今日 **tilting 加群**と呼ばれるものによって表現されることが分かり，さらにこれが **tilting 複体**の概念に一般化され，これを用いて環（の加群圏）の導来圏の三角同値を特徴付けることができるようになった．Tilting 加群の概念はさらに最近 cluster tilting 対象の概念に拡張され，これは，cluster 代数とも，Calabi–Yau 三角圏とも深い関連を持ち，現在活発に研究されている．

上のように，quiver だけを考えていたのでは，有限表現型を持つものはあまりにも少なくなる．ところが表現に条件をつけてやると，そのような直既約表現の同型類の個数が有限になることがよくある．例えば，quiver L_1 は無限表現型を持つが，表現 V に条件 $V(\alpha)^3 = 0$ を課すと，直既約表現は全部で $J(1,0), J(2,0), J(3,0)$ の 3 個だけになる．この表現は，**関係式付き quiver** $(L_1, \alpha^3 = 0)$ の表現であるという（第 4 節参照）．

4. 道多元環

後で説明するように，有限 quiver Q の k 上の表現は，ある多元環 kQ 上の加群と同一視される．ちょうど，群 G の k 上の表現が群環 kG 上の加群と同一視されるように．この節では，この多元環 kQ を定義する．ベクトル空間 A に乗法を入れて**単位元**（$a \cdot 1_A = a = 1_A \cdot a$ $(a \in A)$ をみたす 1_A のこと）を持つ環にしたものを**多元環**と呼ぶ．ただし，乗法がスカラー乗法と協調するように，条件 $(t1_A) \cdot a = ta = a \cdot (t1_A)$ $(t \in k, a \in A)$ が満たされているものとする．ベクトル空間としての次元 $\dim A$ を多元環 A の**次元**と呼ぶ．多元環の間の線形写像 $\phi\colon A \to A'$ が，乗法を保つとき，すなわち，$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ $(x, y \in A)$ をみたすとき ϕ を多元環の準同型と呼ぶ．ϕ がさらに 1 対 1 対応であるとき，同型と呼ぶ．またそのような ϕ が存在するとき，A と A' は**同型**であるといい，$A \cong A'$ で表す．

例 4.1　**(1)** $T_2(k) := \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in k \right\}$ は 3 次元ベクトル空間で，行列の乗法のもとで多元環になる．

(2) 1 変数多項式環 $k[x]$ は，無限次元ベクトル空間で，多項式の普通の乗法のもとで多元環になる．

任意の集合 M に対して，$F_k(M) := \bigoplus_{\mu \in M} k\mu$ として **M を基底とするベクトル空間**が構成できる．この M として Q 上の道全体の集合 $\mathbb{P}Q$ をとって $kQ := F_k(\mathbb{P}Q)$ を作る．ここで，Q 上の**道**とは，矢を並べた記号 $\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1$ $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in$

$Q_{\mathbf{a}}$) のことである（写像の合成と同じく，矢は右から左へ並べる）．ただし，次の矢の尾と前の矢の頭が一致しているものとする：$\mathbf{t}(\alpha_{i+1}) = \mathbf{h}(\alpha_i)$ $(i = 1, \cdots, n-1)$．この道 μ を，**尾** $\mathbf{t}(\mu) := \mathbf{t}(\alpha_1)$ から**頭** $\mathbf{h}(\mu) := \mathbf{h}(\alpha_n)$ への**長さ** $|\mu| := n$ の道という．例えば，第 2 節の最初の quiver の例では，$\mu := \beta_5\beta_5\beta_4\beta_1$ は点 3 から点 5 への長さ 4 の道である．さらに特別の道として，各点 x ごとに，x から x への**長さ** 0 の道 e_x も考える．Q の点 x から y への道全体を，$\mathbb{P}Q(x, y)$ で表す．ベクトル空間 kQ は，道の合成を積とすることによって多元環になる（ただし，道がつながらないとき，それらの積は 0 と決める[*8)]）が，これを Q の**道多元環**と呼ぶ．kQ の単位元は，$1 = \sum_{x \in Q_{\mathbf{v}}} e_x$ で与えられる．$kQ^+ := F_k(\{\mu \in \mathbb{P}Q \mid |\mu| \geqq 1\})$ とおき，自然数 n に対して $kQ^{+n} := F_k(\{\mu \in \mathbb{P}Q \mid |\mu| \geqq n\})$ とおくと，これらは kQ のイデアルになる．

上の定義を少し変形して，道圏を構成しておく．これは表現や加群の圏を表示するときに用いる．

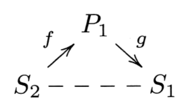
定義 4.2 局所有限 quiver Γ に対して，Γ の**道圏**と呼ばれる圏 $k[\Gamma]$ を次のように定義する．$k[\Gamma]$ の対象とは Γ の点であり，$x, y \in \Gamma_{\mathbf{v}}$ に対して，$k[\Gamma](x, y) := F_k(\mathbb{P}\Gamma(x, y)) \subseteq k\Gamma$ とする．合成は，上で定義された $k\Gamma$ の乗法で定義する．

例 4.3 例 3.2 でとりあげた quiver A_2, L_1 について，道多元環を計算してみよう．

(1) $\mathbb{P}A_2 = \{e_1, e_2, \alpha\}$ であるから，$kA_2 = ke_1 \oplus ke_2 \oplus k\alpha$. 乗法は，$e_ie_j = \delta_{ij}e_i$ $(i, j = 1, 2)$ $\alpha e_1 = \alpha = e_2\alpha$, $\alpha e_2 = 0 = e_1\alpha$ で定まっている（δ_{ij} はクロネッカーの δ 記号）．さて例 4.1 の多元環 $T_2(k)$ も 3 次元で，$\{e_{11}, e_{22}, e_{21}\}$ を基底にもっている．ただし，e_{ij} は (i, j) 成分だけが 1 でその他の成分はすべて 0 となっている行列（行列単位）である．行列単位の乗法は，$e_{ij}e_{st} = \delta_{js}e_{it}$ $(i, j, s, t = 1, 2)$ で定まっていることに注意すると，対応 $e_i \mapsto e_{ii}$ $(i = 1, 2)$, $\alpha \mapsto e_{21}$ で定義される線形同型写像 ϕ は，乗法を保っていることが分かる．以上より，ϕ は多元環の同型となり，$kA_2 \cong T_2(k)$.

(2) $\mathbb{P}L_1 = \{\alpha^n \mid n \geqq 0\}$ $(\alpha^0 := 1)$ より $kL_1 = \bigoplus_{n \geqq 0} k\alpha^n$. 乗法は，$\alpha^m\alpha^n = \alpha^{m+n}$ で与えられる．したがって，対応 $\alpha^n \mapsto x^n$ $(n \geqq 0)$ は，同型 $kL_1 \to k[x]$ を与える．以上より，$kL_1 \cong k[x]$.

例 4.4 $\mathrm{ind}_k A_2$ は次の quiver Γ と道 gf の生成するイデアル $\langle gf \rangle$ を用いて，$\mathrm{ind}_k A_2 \simeq k[\Gamma]/\langle gf \rangle$ と表される（$\simeq$ は圏同値を表す）：



上において，quiver Γ の点は A_2 の直既約表現であり，$f = (f_1, f_2) = (0, \mathbb{1})$ は自然な埋め込み，$g = (\mathbb{1}, 0)$ は自然な全射である．破線は関係式 $gf = 0$ を表す．Γ は，A_2 の **Auslander–Reiten quiver**（**AR–quiver**）と呼ばれる．

kQ が有限次元であるためには，Q が**巡回路**（尾と頭が一致する長さ 1 以上の道）を含まないことが必要十分である．ある $h \geqq 2$ によって $kQ^{+h} \subseteq I \subseteq kQ^{+2}$ となる kQ のイデアルを**容認**イデアルと呼ぶ．このとき，Q が巡回路を含んでいたとしても，kQ/I はつねに有限次元多元環になる．Quiver Q の点 x, y に対して，$e_y(kQ^{+2})e_x$ の元（すなわち x から y への長さ 2 以上の道の線形結合）を x から y への**関係式**と呼ぶ．すると，容認イデアル I は，有限個の関係式 $\rho := \{\rho_1, \cdots, \rho_t\}$ で生成される：$I = \langle \rho \rangle$．このとき組 (Q, ρ) を**関係式付き quiver** と呼び，$k(Q, \rho) := kQ/\langle \rho \rangle$ とおく．Q の表現 V が条件 $V(\rho_i) = 0$ $(i = 1, \cdots, t)$

---

*8) 正確にいうと：ベクトル空間 kQ に乗法を次のように定義する．任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{P}Q$ に対して，$\mathbf{t}(\lambda) \neq \mathbf{h}(\mu)$ のとき $\lambda \cdot \mu := 0$ とし，$\mathbf{t}(\lambda) = \mathbf{h}(\mu)$ のとき，$|\mu| = 0$ なら $\lambda \cdot \mu := \lambda$, $|\lambda| = 0$ なら $\lambda \cdot \mu := \mu$ とする．（注意：これより特に，$e_x \cdot e_x = e_x$.）また，$\lambda = \alpha_m \cdots \alpha_1$, $\mu = \beta_n \cdots \beta_1$ ならば，$\lambda \cdot \mu := \alpha_m \cdots \alpha_1\beta_n \cdots \beta_1$ と定める．kQ の一般の元 $\sum_{\lambda \in \mathbb{P}Q} s_\lambda \lambda$ と $\sum_{\mu \in \mathbb{P}Q} t_\mu \mu$ に対しては，

$$\left(\sum_{\lambda \in \mathbb{P}Q} s_\lambda \lambda\right) \cdot \left(\sum_{\mu \in \mathbb{P}Q} t_\mu \mu\right) := \sum_{\lambda, \mu \in \mathbb{P}Q} (s_\lambda t_\mu)(\lambda \cdot \mu).$$

以上のように定義すると，kQ は多元環になる．

をみたすとき[*9]，V を (Q,ρ) の**表現**と呼ぶ．それで，(Q,ρ) のことを $(Q,\rho_1=0,\cdots,\rho_n=0)$ とも表示する．(Q,ρ) の表現とそれらの間の射全体からなる圏を $\mathrm{rep}_k(Q,\rho)$ で表す．ここでも，Krull–Schmidt の定理が成り立つので，主要目標は次のようになる．

> **問題 2**　与えられた関係式付き quiver (Q,ρ) の直既約表現をすべて求めよ．可能ならもっと詳しく，それらとそれらの間の射全体からなる圏 $\mathrm{ind}_k(Q,\rho)$ を求めよ．

Q が巡回路を含まないときは，$I=0=\langle\emptyset\rangle$ は kQ の容認イデアルになり，$k(Q,\emptyset)\cong kQ$ となるので，問題 1 は上の問題に含まれる．

例 4.5　Z_2 を次の quiver，$\rho:=\{\alpha\beta\alpha,\beta\alpha\beta\}$ とする：

$$1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2$$

このとき，(Z_2,ρ) は関係式付き quiver で $\langle\rho\rangle$ は容認イデアルである．問題 2 の解答例として，この解説の最後に，$\mathrm{ind}_k(Z_2,\rho)$ を求める．

5. 多元環上の加群

V を k 上 2 次の列ベクトル全体のなすベクトル空間とすると，$A:=T_2(k)$ の任意の元 a と V の任意の元 v の積 $a\cdot v$ を，行列と列ベクトルの普通の積で定義できる．この積は，ベクトル空間のスカラー倍と類似した次の 4 つの性質を持っている：(i) $(t1_A)\cdot v=tv$; (ii) $a\cdot(b\cdot v)=(ab)\cdot v$; (iii) $a\cdot(v+w)=a\cdot v+a\cdot w$; (iv) $(a+b)\cdot v=a\cdot v+b\cdot v$ $(t\in k, a,b\in A, v,w\in V)$．一般に，多元環 A の元と有限次元ベクトル空間 V の元の間に積が定義され，その積が上の 4 つの性質を持つとき，V を **A 加群**と呼ぶ．V のベクトル空間としての次元を A 加群 V の**次元**と呼ぶ．A 加群の間の**準同型** $f\colon V\to W$ も $f(a\cdot v)=a\cdot f(v)$ $(a\in A, v\in V)$ をみたす線形写像として定義され，A 加群の圏 $\mathrm{mod}\,A$ が定義される．多元環の表現論における主要な目標は，圏 $\mathrm{mod}\,A$ を決定することにある．ここでも Krull–Schmidt の定理が成り立つので，主要問題は次の形になる．

> **問題 3**　与えられた多元環上の直既約加群をすべて求めよ．可能ならもっと詳しく，それらとそれらの間の準同型全体からなる圏 $\mathrm{ind}\,A$ を求めよ．

多元環 A から最も簡単に得られる加群は，A それ自身である（作用は A の乗法で与えられる）．A 加群 A が，互いに非同型な直既約加群の直和に分解できるとき，多元環 A を**基本多元環**[*10]と呼ぶ．例えば，Q を quiver，I を kQ の容認イデアルとすると，kQ/I は基本多元環になる．逆に：

> **定理 5.1**（Gabriel）　k が代数的閉体ならば，任意の基本多元環 A は，ある quiver Q と kQ の容認イデアル I によって，$A\cong kQ/I$ と書け，Q は同型を除いて，A によってただ 1 つに定まる．

そこで以後，**多元環は $A=kQ/I$（Q は quiver，I は kQ の容認イデアル）の形**であるとする．I を生成する有限個の関係式の集合 ρ を選んでおくと，A は関係式付き quiver (Q,ρ) で表される：$A=kQ/I=k(Q,\rho)$．このとき $J:=kQ^+/I$ とおき，各 $\mu\in kQ$ に対して，$\overline{\mu}:=\mu+I\in kQ/I$ とおく．また，ベクトル空間の双対をとる操作を $D:=\mathrm{Hom}_k(\text{-},k)$ とおく．すると，基本的な直既約加群が $\overline{e}_x$ を用いて次のようにして求まる．

> **定理 5.2**　Q の各点 x に対して，次は直既約加群である：$A\overline{e}_x$（**直既約射影加群**），$A\overline{e}_x/J\overline{e}_x$（**単純加群**），$D(\overline{e}_xA)$（**直既約入射加群**）．

残りの直既約加群を求め，表現の圏を調べるために **Auslander–Reiten 理論**（**AR 理論**）を用いる．

---

*9)　Q の表現 V と，$e_y(kQ)e_x$ $(x,y\in Q_{\mathbf{v}})$ の元 $\lambda=\sum_{\mu\in\mathbb{P}Q}s_\mu\mu$ に対して，線形写像 $V(\lambda)\colon V(x)\to V(y)$ を $V(\lambda):=\sum_{\mu\in\mathbb{P}Q}s_\mu V(\mu)$ で定義する．ただし，$\mu=\alpha_m\cdots\alpha_1$ $(\alpha_i\in Q_{\mathbf{a}})$ のとき，$V(\mu):=V(\alpha_m)\cdots V(\alpha_1)$ とし，$\mu=e_x=e_y$ のとき，$V(\mu):=\mathbb{1}_{V(x)}$ とする．

*10)　どの多元環 A に対しても，圏 $\mathrm{mod}\,A$ と $\mathrm{mod}\,A'$ が同値となるような基本多元環 A' を作ることができる（森田理論）．したがって，問題 3 を解くには，多元環は**基本多元環**であると仮定してよい．

6. Quiverの表現と多元環上の加群

各 A 加群 M を“ばらして”, (Q,ρ) の表現 $\Phi(M) := (V(x), V(\alpha))_{x,\alpha}$ を次のように作れる：矢 $x \xrightarrow{\alpha} y$ に対して, $V(x) := \overline{e}_x M$, $V(\alpha) := \overline{\alpha}\cdot$ (すなわち $V(\alpha)(v) := \overline{\alpha}v$ $(v \in V(x))$).

逆に, (Q,ρ) の表現 V を“まとめて”, A 加群 $\Psi(V) := \bigoplus_{x\in Q_{\mathrm{v}}} V(x)$ を次で定義できる：$\lambda \cdot v := \delta_{y,x} V(\lambda)(v)$ $(v \in V(x), \overline{\lambda} \in \overline{e}_z A \overline{e}_y)$. Φ と Ψ は互いに逆の圏同値を与え，次が成り立つ.

定理 6.1 $\mathrm{rep}_k(Q,\rho) \simeq \mathrm{mod}\, A$.

したがって, (Q,ρ) の表現を調べることと, A 加群を調べることとは同じことになる．特に，問題2と3は同じ問題になる．また，この圏同値を用いると，定理 5.2 から，直既約射影表現 $P_x := A\overline{e}_x$, 単純表現 $S_x := A\overline{e}_x / J\overline{e}_x$, 直既約入射表現 $I_x := D(\overline{e}_x A)$ $(x \in Q_{\mathrm{v}})$ が求まる.

例 6.2 例 4.5 の関係式付き quiver (Z_2,ρ) に対して, P_1, P_2, S_1, S_2 を計算する．各点 x に対して, $P_1(x) = \overline{e}_x(A\overline{e}_1) = \sum_{\mu\in\mathbb{P}Q(1,x)} k\overline{\mu}$ であるから,

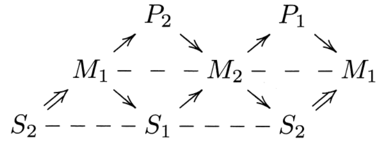
$$P_1 = \left(k\overline{e}_1 \oplus k\overline{\beta\alpha} \underset{\overline{\beta}\cdot}{\overset{\overline{\alpha}\cdot}{\rightleftarrows}} k\overline{\alpha} \right) = \left(k^2 \underset{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}{\overset{[1,0]}{\rightleftarrows}} k \right),$$

同様にして, $P_2 = \left(k \underset{[1,0]}{\overset{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}{\rightleftarrows}} k^2 \right)$ また, $S_1 = \left(k \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0 \right)$, $S_2 = \left(0 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} k \right)$. この場合, I_1, I_2 はそれぞれ P_1, P_2 と同型になる.

最後に, $\mathrm{ind}_k(Z_2,\rho)$ を求める．上記以外に，あと2つ直既約表現 M_1, M_2 が存在する：

$$M_1 = \left(k \underset{0}{\overset{1}{\rightleftarrows}} k \right),\quad M_2 = \left(k \underset{1}{\overset{0}{\rightleftarrows}} k \right).$$

(Z_2,ρ) の AR–quiver Γ は次で与えられる：



(二重の矢“⇒”を同一視して張り合わせること.) すると, $\mathrm{ind}_k(Z_2,\rho)$ は，次のように表示できる：$\mathrm{ind}_k(Z_2,\rho) \simeq k[\Gamma]/\langle \mathrm{mesh} \rangle$. ただし，各破線に対して，その左端の点から右端の点への長さ2の道全部 (これらで決まる部分 quiver を**編み目**と呼ぶ) を足し合わせたものを，その破線に対する**編み目関係式** (mesh) と呼ぶが，編み目関係式全体 (この場合は 4つ) で生成されるイデアルを $\langle \mathrm{mesh} \rangle$ とおいた.

一般に，圏 $\mathcal{I} := \mathrm{ind}_k(Q,\rho)$ をその**無限根基**というイデアル $\mathrm{rad}^\infty \mathcal{I}$ で割った圏 $\mathcal{I}/\mathrm{rad}^\infty \mathcal{I}$ は, AR–quiver と関係式で表示できる．ちょうど，群が生成元と関係式で表示できるように．道圏の構成が，群における自由群の構成に相当する．特に (Q,ρ) が有限表現型の場合, $\mathrm{rad}^\infty \mathcal{I} = 0$ なので, $\mathrm{ind}_k(Q,\rho)$ 自身が AR–quiver と関係式で (大抵は編み目関係式だけで) 表示できる*11).

---

*11) 以上の計算を行うとき AR 理論[1,2,5]を用いる．その要点をいくつか挙げると：(1) 任意の非射影的【非入射的】な直既約加群に対して，それを第3項【第1項】とする, **AR 列** (**概分裂列**) と呼ばれる特殊な短完全列が存在する．(2) 射影的かつ入射的な直既約加群は，ある AR 列の中間項の直和因子として現れる．(3) AR 列の中間項を直既約加群の直和に分解することにより，編み目が作られる．(4) すべての編み目を張り合わせると, AR–quiver が得られる．(5) Q が連結な quiver で, (Q,ρ) の AR–quiver Γ が有限な連結成分 Γ' を持てば, $\Gamma' = \Gamma$.

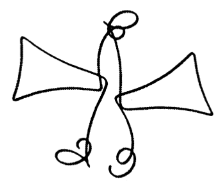
参考文献

1) I. Assem, D. Simson and A. Skowroński: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, *London Math. Soc. Student Texts* **65**, Cambridge Univ. Press, 2006.
2) M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø: Representation Theory of Artin Algebras, *Cambridge Stud. in Adv. Math.*, **36**, Cambridge Univ. Press, 1995.
3) I.N. Bernstein, I.M. Gelfand and V.A. Ponomarev: Coxeter functors, and Gabriel's theorem, (Russian), *Uspehi Mat. Nauk* **28**, no.**2**(170), 1973, 19–33.
4) P. Gabriel: Unzerlegbare Darstellungen I, *Man. Math.* **6**, 1972, 71–103.
5) P. Gabriel: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, Representation theory, I (Proc. Workshop, Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), *Springer Lect. Notes* **831**, 1980, 1–71.
6) 草場公邦：『行列特論』, 基礎数学選書 21, 裳華房, 1979, 66–155.
7) C.M. Ringel: Hall algebras, “Topics in Algebra”, *Banach Center Publ.* **26**(1), Warszawa, 1990, 433–447.

(あさしば・ひでと，静岡大学理学部)

D 加群

多様体上の線形微分方程式系



清水　勇二

D 加群（D–module）という極めて代数的な響きのする名称は，多様体上の線形微分方程式系を指し，この D は多様体上の偏微分作用素のなす非可換な環を表している．微分方程式系を D 加群として捉える発想を説明してから，典型例，基本的な関手的操作，Riemann–Hilbert 対応を述べる．最後に D 加群の重要な応用である表現の局所化のアイディアや幾何学的 Langlands 対応の話題に触れよう．これらは弦理論にも関係が深い．本文中では敬称を略することをご容赦いただきたい．

1. D 加群とは

さて 2008 年は，佐藤の超関数（hyperfunction）の発見からちょうど 50 年を数える．佐藤幹夫はすでに 1960 年の東大での談話会で，線形偏微分方程式系を D 加群として扱う構想を話された．しかしそれが日の目を見るのは，10 年後の柏原正樹の修士論文においてであった[1,6]．そのときの構想の一端を見ながら，D 加群とは何かを説明しよう．

複素多様体*1) X の（開集合 U 上の）局所座標系 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ において

$$P(x, \partial_x) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\partial^\alpha \qquad (1)$$

と表されるものが，U 上の**線形微分作用素**であり U 上の正則関数に作用する．ここで，$a_\alpha(x)$ は x の正則関数であり，$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ として，多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対して $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ とおき，P の式における和は有限であるとする．このような微分作用素の全体は作用素の合成を積として非可換な環 $D(U)$ をなす．積は

$$\partial_i \circ a(x) = a(x)\partial_i + \frac{\partial a}{\partial x_i}(x)$$

という規則から計算できる．関数は掛け算作用素と考えている．

以上は U 上の局所座標系に依存するが，実はこのような $P(x, \partial_x)$ は X 上で貼り合わされる．そして $D(U)$ は X 上の環の層 $\mathcal{D}_X$ を定める．環や加群の概念は，層の言葉により多様体上の環の層や加群の層として一般化される．この節の最後までは，局所的な扱いに終始するので層の言葉を省こう．

未知関数 $u = u(x)$ について

$$P(x, \partial_x)u(x) = Pu = 0$$

が単独の線形微分方程式である．複数の未知関数 $u_1, \cdots, u_m$ に対する

$$\sum_{j=1}^m P_{ij}u_j = 0 \quad (i = 1, \cdots, l) \qquad (2)$$

を**方程式系**（system）と呼ぶ．

未知関数の取り方に依存しない方程式系の本質的な見方をしようと思うと，必然的に環 D 上の

*1)　実解析多様体については，その複素近傍を考えて議論することができる．複素代数多様体の場合は，ほぼ平行に理論が展開する部分が多い．

有限表示される加群に行き着く．すなわち，上の方程式系 (2) の場合，

$$M = D^m/D^lP, \quad P = (P_{ij})$$

なる表示をもつ商加群を考えるのである．ここで，$P = (P_{ij})$ は微分作用素を成分とする $l \times m$ 行列で，行ベクトルの $D^l \ni (Q_1, \cdots, Q_l)$ に右から掛ける．

左 D 加群 D^m の標準基底 $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$（1 の位置は i 番目, $i = 1, \cdots, m$）の商 M における類を u_i とおくと，もちろん $u_1, \cdots, u_m$ が M を生成する．この生成系が満たすべき線形関係式は，D^lP に属する $e_i (i = 1, \cdots, m)$ の線形結合で与えられる．したがって，**有限表示を持つ**ということは有限個の元で生成され，かつその基本的関係式も有限個で済む，という意味である．

環上の加群の言葉では，行列 P の右からの積は $\phi : D^l \to D^m$ なる左 D 加群の準同型写像であり，$M \simeq \mathrm{Coker}\,\phi$ となる．言い換えると，

$$D^l \xrightarrow{\phi} D^m \to M \to 0 \qquad (3)$$

なる完全列（M の有限表示）が存在する．

有限表示可能な M に対する有限表示の取り方は，一意的ではない．例えば，$\lambda \neq -1$ のとき

$$M = D/D(x_1\partial_1 - \lambda) \simeq D/D(x_1\partial_1 - \lambda - 1) = M'$$

である．これは $(x_1\partial_1 - \lambda)\partial_1 = \partial_1(x_1\partial_1 - \lambda - 1)$ であることから，$\frac{1}{\lambda+1}\partial_1 : M \to M'$ と $\times x : M' \to M$ が互いに逆であることが分かる．したがって，M には複数の有限表示が取れる．

生成系の取替えに関する一般的な議論は，ベクトル空間の基底の取替えの議論と同様であるので，ここでは省く．左 D 加群 M 自体が本質的（intrinsic）であることを強調しておこう．

もう一つ注意しておくべきなのは，環 D は Noether 環であるという事実である[*2)]．これにより，有限生成左 D 加群は有限表示可能であることが分かるので，我々が扱いたいのは**有限生成 D 加群**ということになる．

*2) より正確には，環の層 $\mathcal{D}_X$ は，$\mathcal{D}_X$ 上連接であり，その茎（stalk）$\mathcal{D}_x$ ($x \in X$) は Noether 環である．この事実は，岡–Cartan の定理（$\mathcal{O}_X$ の連接性）とフィルター環と加群の一般論から導ける．詳しくは，文献 3), §A.1 参照．

線形偏微分方程式系への D 加群の観点によると，どのような関数の範囲で**方程式系の解**を求めるかということを，方程式系の表示とは切り離して考えるのは至極当然のことになる．

今，方程式系 (2) の正則関数解を考えるとしよう．そこで天下りだが，完全列 (3) の $\mathrm{Hom}_D(\ ,\mathcal{O})$ による双対の一種を取ってみる．すると，完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_D(M, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_D(D^m, \mathcal{O}) \xrightarrow{{}^t\phi} \mathrm{Hom}_D(D^l, \mathcal{O}) \qquad (4)$$

が得られる．$\mathrm{Hom}_D(D^m, \mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}^m$ などが成り立ち，${}^t\phi$ は列ベクトル ${}^t(f_1, \cdots, f_m) \in \mathcal{O}^m$ に $l \times m$ 行列 $P = (P_{ij})$ を左から掛ける写像である．完全列 (4) は

$$0 \to \mathrm{Hom}_D(M, \mathcal{O}) \to \mathcal{O}^m \xrightarrow{{}^t\phi} \mathcal{O}^l$$

に他ならず，$\varphi \in \mathrm{Hom}_D(M, \mathcal{O})$ は左の単射で ${}^t(\varphi(u_1), \cdots, \varphi(u_m)) \in \mathcal{O}^m$ に対応する．(4) の完全性は，${}^t(f_1, \cdots, f_m) \in \mathcal{O}^m$ が方程式系 (2) を満たすこととそれが $\mathrm{Hom}_D(M, \mathcal{O})$（の像）に含まれることが同値であることを意味する．

更に，ホモロジー代数的な観点を推し進めてみよう．単独方程式 $Pu = 0$ に対応する D 加群 $M = D/DP$ は，完全列

$$0 \to D \xrightarrow{\times P} D \to M \to 0$$

にフィットする．その $\mathrm{Hom}_D(\ ,\mathcal{O})$ を取ると，

$$0 \to \mathrm{Hom}_D(M, \mathcal{O}) \to \mathcal{O} \xrightarrow{P\times} \mathcal{O} \to \mathrm{Ext}^1_D(M, \mathcal{O}) \to 0$$

が完全列となり，

$$\mathrm{Hom}_D(M, \mathcal{O}) = \{u \in \mathcal{O} \mid Pu = 0\},$$
$$\mathrm{Ext}^1_D(M, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/P\mathcal{O}$$

を得る．これから，Ext^1 は非斉次方程式

$$Pu = f \quad (f \in \mathcal{O})$$

の**可解性**（consistency）を表すことが分かり，D 加群の高次の Ext 群の情報が方程式系にとり重要であることが結論される．

以上の話は，文献 1) の中の「$\mathcal{D}$ 加群と非線型可積分系」，「佐藤幹夫先生との会見」の中で佐藤先生本人により生き生きと語られている．

2. 連接 D 加群と典型例

D 加群を勝手な複素多様体 X 上で大域的に考えるために，層（sheaf）の言葉（本特集の橋本氏の論説[2)]参照）を使う必要がある．そこで，環の層 $\mathcal{D}$ 上の加群の有限性の条件を説明し，次に幾何学に登場する典型的な D 加群を挙げておこう．

前節で定義した $D(U)$ は U 上の局所座標系に依存するが，X 上で global な微分作用素を考えることができる．正則関数のなす構造層 $\mathcal{O}_X$ の自己準同型であり，局所的に (1) のような展開を持つものを X 上の微分作用素と言う．そして，

$$\mathcal{D}_X : Open(X) \to Rings \ ; \ U \ \mapsto \ D(U)$$

なる X の開集合のなす圏 $Open(X)$ から非可換環の圏 $Rings$ に値をとる非可換環の層 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X$ が定まり，局所座標系のとり方に依存しない．

k 階以下の微分作用素の全体 $F_k\mathcal{D}_X (= \mathcal{D}^{\leq k})$ は，$\mathcal{D}_X$ のフィルターを定め，$\mathcal{D}_X$ は**フィルター環**になる．実は付随する次数環 $Gr^F\mathcal{D} := \oplus_k Gr^F_k\mathcal{D}$ ($Gr^F_k\mathcal{D} = F_k\mathcal{D}/F_{k-1}\mathcal{D}$) は接ベクトル束 TX の断面のなす層が生成する対称代数 $S(T_X)$ と同型であり，$Gr^F\mathcal{D} \simeq S(T_X) \subset \pi_*\mathcal{O}_{T^*X}$ であることを注意しておこう．ここで，$\pi : T^*X \to X$ は X の余接ベクトル束からの自然な射影である．これは D 加群の**超局所的（microlocal）な構造**と関連することで，後述する特性多様体に結びついている．

局所的に有限表示可能な $\mathcal{D}$ 加群の適当なクラスは，連接 $\mathcal{D}$ 加群である．ここで，局所的に有限生成の左 $\mathcal{D}$ 加群 $\mathcal{M}$ が**連接**であるとは，次の条件が満たされることを言う．

(*coh*) 任意の開集合 U に対し，$\mathcal{M}|_U$ の任意の局所的に有限生成の部分 $\mathcal{D}$ 加群は局所的に有限表示可能である．

連接 $\mathcal{D}$ 加群は微分方程式系を一般的に扱うものであり，自由 $\mathcal{D}_X$ 加群から解が有限次元的特徴をもつホロノミー系まで含んでいる．

余談だが，$\mathcal{D}_X$ を至るところ $\mathcal{O}_X$ に代えて，連接 $\mathcal{O}_X$ 加群が定義できる．すると，$\mathcal{O}_X$ の連接性（岡–Cartan の定理）は多変数複素関数論の主要な定理の一つである．

複素多様体 X に対して，左 $\mathcal{D}_X$ 加群のなす圏（category）を $Mod(\mathcal{D}_X)$，連接左 $\mathcal{D}_X$ 加群のなす圏を $Mod_{coh}(\mathcal{D}_X)$ と記す．どちらも **abel 圏**[*3)]であることが示される．

さて，典型的な D 加群を挙げよう．

A) 正則ベクトル束上の可積分接続

X 上の正則ベクトル束（有限階の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群）$\mathcal{F}$ 上の（正則な）接続 $\nabla : \mathcal{F} \to \Omega^1_X \otimes \mathcal{F}$ は，$\nabla \circ \nabla : \mathcal{F} \to \Omega^2_X \otimes \mathcal{F}$ が 0 であるとき可積分であると言う．$\mathcal{F}$ が自明な $\mathcal{O}_X$ 加群のときは，$\nabla = d' + A\wedge$（A は Ω^1_X の元を成分とする正方行列）という形に書けて，可積分条件は $d'A + A \wedge A = 0$ である．ここで，$d' : \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X$ は正則な外微分である．

$\mathcal{F}$ 上の可積分接続 ∇ が与えられると，接ベクトル $v \in T_X$ 方向の共変微分 ∇_v を用いて $\mathcal{F}$ に左 D 加群の構造が $v \cdot s = \nabla_v(s)$ により定まり，連接である．特に，構造層 $\mathcal{O}_X$ は左連接 D 加群である．（更にホロノミー D 加群である．）

A′) Gauss–Manin 接続

$f : Y \to X$ を複素多様体間の smooth（すなわち極大階数をもつ）な固有正則写像とする．さらに Y 上の 2 次微分形式 ω が存在し，その各ファイバー

*3) 圏 $\mathcal{C}$ の任意の対象 X, Y について，射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ が abel 群の構造を持ち，合成に関して結合法則が成り立ち，またゼロ対象を持ち，直和 $X \oplus Y$ が存在するとき，$\mathcal{C}$ を加法圏と言う．加法圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 $f : X \to Y$ について，核 $\mathrm{Ker}\, f$，余核 $\mathrm{Coker}\, f$ が存在して，$\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, f \hookrightarrow X) \simeq \mathrm{Ker}(Y \to \mathrm{Coker}\, f)$（準同型定理）が成り立つとき，$\mathcal{C}$ を abel 圏であると言う．

$f^{-1}(x)$ $(x \in X)$ への制限がファイバーの Kähler 計量を与える，と仮定する．このとき，各ファイバーの cohomology $H^k(f^{-1}(x), \mathbb{C})$ は $x \in X$ が動くとき X 上の局所定数層をなす．これは定数層 $\mathbb{C}_X$ の k 次高次順像 $F = R^k f_* \mathbb{C}_X$ に他ならない．ベクトル束 $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \otimes R^k f_* \mathbb{C}_X$ は，相対的 de Rham 複体 $\Omega^{\cdot}_{Y/X}$ の高次順像 $R^k f_*(\Omega^{\cdot}_{Y/X})$ に同型で，Gauss–Manin 接続と呼ばれる標準的な可積分接続を持ち，対応する微分方程式を Picard–Fuchs 方程式と言う．

B) 部分多様体に台を持つデルタ関数の層

Z を X の余次元 d の部分多様体とするとき，Z に台を持つデルタ関数を解に持つ方程式系が，代数的相対コホモロジー $\mathcal{H}^d_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$*4) により与えられる．この層は，左 D 加群の構造を持ち，$\mathcal{B}_{Z|X}$ と記される．X の局所座標系 $(x_1, \cdots, x_n)$ を Z が $x_1 = \cdots = x_d = 0$ で与えられるように選んだとき，$\mathcal{B}_{Z|X} =$

$$\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X x_1 + \cdots + \mathcal{D}_X x_d + \mathcal{D}_X \partial_{d+1} + \cdots + \mathcal{D}_X \partial_n$$

と表示される．実は $\mathcal{B}_{Z|X}$ は $Z \hookrightarrow X$ による D 加群 $\mathcal{O}_Z$ の積分 $\int_i \mathcal{O}_Z$ に等しい（後述）．

C) 最高次の正則微分形式の層 $\Omega_X^{\dim X} = \omega_X$

ω_X には右 D 加群の構造が入る．すなわち，L_v を微分形式に作用するリー微分として $\eta \cdot v = L_v(\eta)$ $(v \in T_X,\ \eta \in \omega_X)$ とおく．局所座標系 $(x_1, \cdots, x_n)$ で $\eta = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ と表されたとき，

$$\eta \cdot \partial_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

となる．左 D 加群 $\mathcal{M}$ に ω_X をテンソルすると，

$$(m \otimes \eta) v = m \otimes (\eta v) - (vm) \otimes \eta$$

により右 D 加群の構造が $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X$ に入る．

こうして ω_X により左 D 加群と**右 D 加群**を自由に往復することができる．左と右の区別だが，左加群は関数がみたす微分方程式系に対応し，右加群は最高次の微分形式（つまり体積要素）への D の作用に対応する．それ以外の正則直線束（更に一般に正則ベクトル束）に作用する twist した微分作用素や加群も必要に応じて考えるのである．

*4) $\mathcal{H}^k_{[Z]}(\mathcal{F}) = \lim_m \mathcal{E}xt^k(\mathcal{O}/\mathcal{I}_Z^m, \mathcal{F})$ と定義される．$\mathcal{I}_Z$ は Z の定義イデアルである．

■ 3. D 加群の基本操作 ■

微分方程式系の構造の解明，表現論への応用等のためには，関手的操作を含めた D 加群の理論の柔軟さが役立つ．まずホロノミー D 加群を定義し，D 加群の振舞いのうち複素多様体間の正則写像に関する引き戻し（制限）と積分という基本操作等を説明しよう．

さて，連接 D 加群 $\mathcal{M}$ の幾何的不変量である特性多様体 $Ch(\mathcal{M})$ を導入する．$\mathcal{M}$ に $\mathcal{D}_X$ のフィルターと両立する‘良い’フィルター $F_k \mathcal{M}$ を選び，$Gr_k^F \mathcal{M} = F_k \mathcal{M} / F_{k-1} \mathcal{M}$ とおくと，$Gr^F \mathcal{M} := \oplus_k Gr_k^F \mathcal{M}$ は $Gr^F \mathcal{D} := \oplus_k Gr_k^F \mathcal{D}$ 上の加群になる．ここで，$F\mathcal{D}$ は $\mathcal{D}_X$ の作用素の階数によるフィルターである．$Gr^F \mathcal{D}_X \simeq S(T_X) \subset \pi_* \mathcal{O}_{T^*X}$ であるので

$$Ch(\mathcal{M}) = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{Gr^F \mathcal{D}} Gr^F \mathcal{M})$$

とおく．$\mathcal{O}_{T^*X}$ 加群としての台をとっているので，これは余接束 T^*X の解析的部分集合であり，連接 D 加群 $\mathcal{M}$ の**特性多様体**と呼ばれる（図 1）．

特性多様体は，余接束の標準的な Poisson 括弧積について包合的（involutive）であることが知られている（佐藤・河合・柏原の定理[3,4]）．特に $\dim Ch(\mathcal{M}) \geqq \dim X$ である．等号が成り立つと

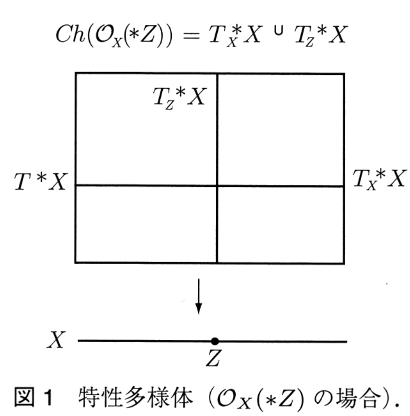


図 1　特性多様体（$\mathcal{O}_X(*Z)$ の場合）．

き，$\mathcal{M}$ はホロノミー系（**holonomic system**）あるいはホロノミー D 加群と呼ばれる．極大過剰決定系と呼ぶこともある．

次に，$f: X \to Y$ を複素多様体間の正則写像として，左 $\mathcal{D}_Y$ 加群 $\mathcal{N}$ の引き戻し（制限）$f^*\mathcal{N}$ と右 $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ の積分 $\int_f \mathcal{M}$ を説明しよう．

引き戻しは，元来 X が Y の部分多様体であるとき，Y 上の微分方程式を X に制限する操作を D 加群に翻訳したものである．$\mathcal{D}_Y \supset \mathcal{O}_Y$ ゆえ，$\mathcal{N}$ を $\mathcal{O}_Y$ 加群と見て X へ引き戻した $\mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{N}$ に次のように $\mathcal{D}_X$ の左作用を定めることができる．$(x_1, \cdots, x_n)$，$(y_1, \cdots, y_m)$ を X, Y の局所座標系，$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ として

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a \otimes u) = \frac{\partial a}{\partial x_i} \otimes u + \sum_{j=1}^{m} a \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial y_j} u$$

（$a \in \mathcal{O}_X$，$u \in \mathcal{N}$）とおく．これは座標系のとり方に依らない意味を持つので左 $\mathcal{D}_Y$ 加群 $\mathcal{N}$ の引き戻しないし制限と呼び，$f^*\mathcal{N}$ と記す．

$\mathcal{N} = \mathcal{D}_Y$ の場合の引き戻しを $\mathcal{D}_{X\to Y}$ と記す．これは上記の通り左 $\mathcal{D}_X$ 加群かつ右 $f^{-1}\mathcal{D}_Y$ 加群の構造を持ち，

$$\mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{N} \simeq \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{N}$$

である．連接な $\mathcal{N}$ が f に関して非特性的であれば，引き戻し $f^*\mathcal{N}$ も連接である．

今度は D 加群の積分を定義しよう．**積分**という言葉は，f が射影 $X = Y \times Z \to Y$ の場合に，ファイバーの Z 方向に微分方程式の解 u を積分したもの $\int_{f^{-1}(y)} u$ がみたす方程式を考察することに由来する．さて右 $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対し，$f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y})$ には，$\mathcal{D}_{X\to Y}$ の $f^{-1}\mathcal{D}_Y$ 加群の構造を通じて自然に $\mathcal{D}_Y$ の右作用が入り，これを $\mathcal{M}$ の f に沿っての積分と呼び $\int_f \mathcal{M}$ と表す．2 節の最後で触れた通り，右 D 加群は体積要素の特徴を持つので自然にファイバー方向に積分できるわけである．

左 $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{L}$ の積分を定義するには，微分形式を使って右加群に直して積分し，また左加群に戻す，つまり $f_*((\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{\otimes -1} \simeq f_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{L})$ を考える．但し，$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} = \omega_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\omega_Y \simeq f^{-1}\mathcal{D}_Y \otimes (\omega_X \otimes \omega_Y^{\otimes -1})$ とおく．

以上は素朴な引き戻しと積分であり，一般には高次のものを考える必要があり導来圏に移行して定義される*5)．

■ 4. ホロノミー系と Riemann–Hilbert 対応 ■

ホロノミー系の持つ様々な性質は 1970 年代に柏原により確立されていった．その中で特に重要なのは，解の有限性と Riemann–Hilbert 対応である．

左 D 加群 $\mathcal{M}$ の（正則関数）解あるいは**解複体**とは，1 節で考えた Ext を与える複体を層化した $\mathcal{RH}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ のことである．その i 次 cohomology $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ も解（の層）と言う．解複体は，$\mathbb{C}$ ベクトル空間を各点での茎（stalk）に持つ．また，解複体の双対に当たる $\mathcal{M}$ の de Rham 複体 $DR(\mathcal{M}) = \mathcal{RH}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ も使う．名前は，$DR(\mathcal{M}) \simeq \Omega^{\cdot}_X \otimes \mathcal{M}$（$\Omega^{\cdot}_X$ は X の de Rham 複体）なる同一視の存在に由来する*6)．正則ベクトル束上の可積分接続 $(\mathcal{F}, \nabla)$ の場合，$DR(\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Ker}\,\nabla$ であり，これは ∇ に関して平坦な断面の全体で X 上の局所系（local system），すなわち有限階数の局所定数層である．より一般のホロノミー系についても，**解の有限性定理**が成り立つ．

定理 1　ホロノミー系 $\mathcal{M}$ の解の層 $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ $(\forall i)$ は構成的層である．すなわち，解複体 $\mathcal{RH}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ は構成的複体である．

構成的層*7) は有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の局所

---

*5)　導来圏での基本操作と導来圏の説明が文献 3, 7) にある．

*6)　正確には擬同型（quasi–isomorphism）である．これは，左 D_X 加群 $\mathcal{O}_X$ の大域的な自由分解 $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^{\cdot} T_X$ により左辺を計算できるからである．

*7)　層 $\mathcal{F}$ が構成的（constructible）とは，X の解析的部分集合による有限増大列 $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_r = X$ であって，$\mathcal{F}|_{X_i - X_{i-1}}$ が有限次元 C ベクトル空間の局所定数層となっているものが存在することを言う．また，層の有界な複体 $F^{\cdot}$ の cohomology $\mathcal{H}^i(F^{\cdot})$ $(\forall i)$ がすべて構成的層であるとき，$F^{\cdot}$ を構成的複体と言う．

系の一般化である．更に構成的複体についての一般論とホロノミー D 加群の局所双対性などにより，ホロノミー D 加群の de Rham 複体 $DR(\mathcal{M})$ も構成的複体であることが分かる．

与えられた基本群の表現を解の局所系（モノドロミー）とする可積分接続の存在を問う Hilbert の第 21 問題は，Deligne により 1970 年に解決していたが，これを構成的層の複体に拡張することは自然な問題である．柏原・大島・河合が導入した確定特異点型のホロノミー D 加群*8) を用いると，拡張が望ましい形で得られる．

定理 2（**Riemann–Hilbert 対応**）de Rham 複体の関手 $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X) \to D^b_c(\mathbb{C}_X)$ は圏の同値 (equivalence of categories) を与える．しかも，それぞれの圏での 6 種の操作と交換する．

ここで，構成的複体のなす三角圏を $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ と記し，cohomology $\mathcal{H}^i(\mathcal{M}^\cdot)$ $(\forall i)$ がすべて確定特異点型のホロノミー D 加群である D 加群の有界な複体のなす三角圏を $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ と記した．

6 種の操作というのは，導来圏のレベルでの正則写像 $f : X \to Y$ に関する関手 $f_*, f_!, f^*, f^!$ と双対 $\mathbb{D}$ および（内部）準同型加群 $\mathcal{RH}om$ を指す．これらの操作は，Grothendieck 等による代数多様体の l 進層の場合の類似で，複素多様体上の構成的層については Verdier 等が展開した．例えば，引き戻しについての交換性 $f^* \circ DR_Y = DR_X \circ f^*$ の双対は，$Lf^{-1}\,\mathcal{RH}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{RH}om_{\mathcal{D}_X}(Lf^*\mathcal{N}, \mathcal{O}_X)$ を意味し，（非特性的な場合）Cauchy–Kovalevskaya の定理の一般化に含まれる．

Riemann–Hilbert 対応において，確定特異点型のホロノミー D 加群のなす abel 圏 $M_{rh}(\mathcal{D}_X)(\subset D^b_{rh}(\mathcal{D}_X))$ の DR による像は，構成的層のなす abel 圏 $M_c(\mathbb{C}_X)(\subset D^b_c(\mathbb{C}_X))$ とは一致しない．この像に属する構成的複体*9) を**偏屈層**（**perverse sheaf**）と言う．Riemann–Hilbert 対応および偏屈層は，表現論や数論において有効に用いられている．

*8） ホロノミー D 加群 $\mathcal{M}$ が確定特異点型であるとは，$\mathcal{M}$ の'良い' フィルターであって $I_{Ch(\mathcal{M})}Gr^F\mathcal{M} = 0$ を満たすものが存在するときに言う．ただし $I_{Ch(\mathcal{M})}$ は $Ch(\mathcal{M})$ の定義イデアルである．Deligne は滑らかな複素代数多様体の場合に，局所定数層が代数的ベクトル束上の（無限遠で）正則性な可積分接続と一対一に対応することを証明した．

■ 5. 表現論・数論・弦理論への応用 ■

複素連結半単純代数群 G の表現論において，G の**旗多様体**（flag variety）*10) X の幾何はいろいろな役割を演ずる．G の X への作用を微分することにより $\mathcal{D}_X$ の大域断面の空間 $\Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ が包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の商として表せる．（自明な中心指標を持つ）有限生成な $\mathfrak{g}$ の表現 M を係数拡大して，**表現 M の局所化**と呼ばれる X 上の D 加群 $\mathcal{D}_X \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ が得られる．そして，次の基本事実が成り立つ．

定理 3（Beilinson–Bernstein の圏同値） 旗多様体 X は D–affine*11) であり，（自明な中心指標の）有限生成 $\mathfrak{g}$ 加群の圏と連接 $\mathcal{D}_X$ 加群の圏 $Mod_{coh}(\mathcal{D}_X)$ とは対応 $M \mapsto \mathcal{D}_X \otimes M$（とその逆 $\mathcal{M} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{M})$ により）圏同値である．

$\mathfrak{g}$ 加群の問題が D 加群に翻訳されると，次に Riemann–Hilbert 対応を用いて，交叉複体型の偏屈層の問題に翻訳され，旗多様体の Schubert 胞体についての組合せ論的な問題となる．こうして Kazhdan–Lusztig 予想が解決された[5]．また Beilinson–Bernstein の圏同値の考えは，Kac–Moody リー環の表現論にも拡張され，アフィンリー環の表現を用いる共形場理論において可積分

*9） この像は $\forall i$ についての 2 条件 $\mathrm{codim}\, Supp(\mathcal{H}^i(F^\cdot)) \geqq i$, $\mathrm{codim}\, Supp\,(\mathcal{H}^i(F^\cdot)) \geqq i$ で特徴付けられる．

*10） G の旗多様体 X は G の Borel 部分群（極大連結可解閉部分群）の集合である．Borel 部分群の一つを固定し B とすると，共役性から $X \simeq G/B$ である．自明な中心指標を χ_ρ として，同型 $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,\mathrm{Ker}\,\chi_\rho \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ が得られる．局所化 $\mathcal{D}_X \otimes M$ の茎は対応する Borel 部分代数の余不変元の空間である．一般の中心指標 χ の場合もねじれ微分作用素環（TDO）$\mathcal{D}^\chi$ を用いて適宜修正すればよい．

*11） X が D–affine であるとは，次の 2 条件が成り立つこと．すなわち，勝手な連接 D 加群 $\mathcal{M}$ に対して，(i) $H^i(X, \mathcal{M}) = 0$ $(\forall i > 0)$ であり，(ii) $\mathcal{M}$ は $\Gamma(X, \mathcal{M})$ の元で D 加群として生成される．

表現の局所化が共形ブロックのなす可積分接続として登場する．

幾何学的 Langlands 対応，すなわち数論の Langlands 対応の閉 Riemann 面上での類似でも，共形場理論の考えを利用したアプローチが模索されている．閉 Riemann 面 C と複素半単純リー群 G に対して，大雑把には

$$\begin{aligned} &\{\text{ 群準同型} \pi_1(C) \to {}^L G\} \\ \xrightarrow{\sim}\ &\{\mathcal{M}(C,G) \text{ 上の保型的 } D \text{ 加群 }\}, \\ &E \ \mapsto\ Aut_E \end{aligned}$$

なる対応が存在すると予想されている．${}^L G$ は G の Langlands 双対群で，$\mathcal{M}(C,G)$ は C 上の主 G 束のモジュライ空間であり，保型的というのは Hecke 対応*12) に関する固有値性を指す．

今まで一番成功した保型的 D 加群の構成法は，oper と呼ばれる特殊な局所系の場合に，アフィンリー環の臨界レベル表現の局所化として構成する Beilinson–Drinfeld の方法である[8,9]．彼らは更にカイラル Hecke 代数のカイラル homology というアプローチを開拓している．

D 加群の**弦理論への応用**が最近見られるようになってきた．Witten が数論の書物を買い込んだという噂は10年以上前に聞かれたが，2006年の e-print[10] において，幾何学的 Langlands 対応への弦理論からのアプローチが発表された．それは4次元 $N=4$ 超対称 Yang–Mills 理論の Riemann 面への還元により，4次元での S 双対が幾何学的 Langlands 対応と解釈される，というシナリオらしい．そこでは可積分接続と Higgs 場との補間が導入される．また Douglas 等[11] により B 模型の D–brane（B–brane）は連接 $\mathcal{O}$ 加群と，D–brane の bound state は連接 $\mathcal{O}$ 加群の複体と同定されているが，A–brane を twist した D 加群と同定する方法を新しく提案しているようである．

環 D の持つ性質は豊穣な世界を産み出したが，次はどこに有効に働くのかが楽しみである．

「$\mathcal{D}$ 自身のことを議論すると…」[1)]

*12） $\mathcal{F},\mathcal{F}' \in \mathcal{M}(C,G)$ と $\beta : \mathcal{F}|_{X-x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'|_{X-x}$ $(x \in C)$ なる4つ組 $(\mathcal{F},\mathcal{F}',x,\beta)$ の全体を $Hecke$ とおき，自然な射影を $p : Hecke \to \mathcal{M}(C,G)$，$q : Hecke \to C \times \mathcal{M}(C,G)$ とする．$\mathfrak{g}$ の dominant な整ウェイト λ に対応する $Hecke$ 内の連結成分の交叉複体を IC_λ と記し，D 加群の6種の操作を使い，$H_\lambda(\mathcal{A}) = Rq_*(p^*(\mathcal{A}) \otimes IC_\lambda)$ と定義する．$H_\lambda(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A} \boxtimes S_\lambda(E)$ が Hecke 対応に関する固有値性である．但し，S_λ は λ に対応する Schur 関手である．

参考文献

1) 佐藤幹夫著，木村達雄編，『佐藤幹夫の数学』，日本評論社 (2007).
2) 橋本義武，層—現代数学における「図形」，本特集（数理科学 **537**）(2008).
3) 柏原正樹，『代数解析概論』，岩波講座現代数学の展開 1，岩波書店 (2000).
4) 柏原正樹・河合隆裕・木村達雄，『代数解析学の基礎』，紀伊国屋数学叢書 18，紀伊国屋書店 (1980).
5) 谷崎俊之・堀田良之，『D 加群と代数群』，シュプリンガー・ジャパン (1995).
6) M. Kashiwara, *Algebraic study of systems of partial differential equations.* Mémoire de la Soc. Math. France (N.S.) No.63 (1995), xiv+72 pp.
7) A. Beilinson, J. Bernstein, Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. France*, 292 (1981) 15–18.
8) A. Beilinson, V. Drinfeld, *Chiral Algebras*, American Mathematical Society (2004).
9) E. Frenkel, Lectures on the Langlands program and conformal field theory, hep-th/0512172.
10) A. Kapsutin, E. Witten, Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program, hep-th/0604151.
11) P. Aspinwall, D–branes on Calabi-Yau manifolds, hep-th/0403166.

（しみず・ゆうじ，国際基督教大学教養学部）

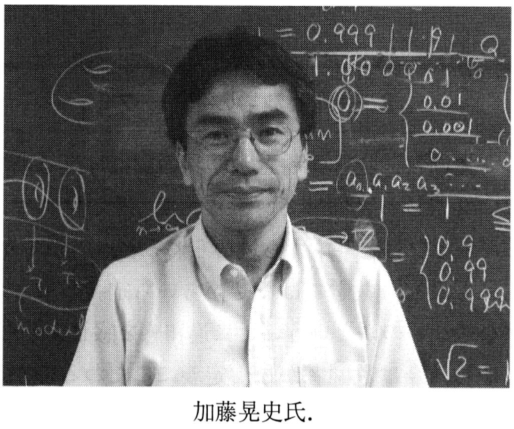
これからの物理数学

加藤 晃史（聞き手：編集部）

1. 教育現場における物理数学

――本特集に関連することですが，今，大学ではどのような物理数学に関する講義が行われているでしょうか．

物理学科では物理数学は，量子力学，電磁気学，統計力学からのアウトソーシングと言いますか，数学の部分はこちらで教わって下さいというような役割です．例えば量子力学で水素原子に関するシュレディンガー方程式を解かなければならないときに，直交関数や球面調和関数などが登場しますが，詳しくは物理数学でやって下さいという感じになります．群論やフーリエ解析も物理数学で教わりますが，必要だから習うのであって，必ずしも系統立てて習う感じではありませんね．



加藤晃史氏．

一方，数学科では数学を一つの体系として習いますから，物理数学という科目もカリキュラムもないのではないのでしょうか．物理数学と言うよりも物理そのものの講義が，選択科目として用意されています．つまり数学の人向けの物理の授業というのが，数学科で言う物理数学教育に当たると思います．

私は数学科の学生向けに解析力学や量子力学の講義を行いましたが，物理学科とは受講している人の問題意識が全然違いますね．物理では，「エネルギーを計算することは当然大事だよね」というイメージが共有されていますが，数学の人向けに行うときは，「エネルギーはこういう関数で，こういう性質を持っている」ということを定義したり証明する必要があります．また，「波を調べる」と言ったとき物理では，海の波や固体を伝わる振動，量子力学の波などのように，波というものには特に定義はなくて，個々のいろいろな見方ができるものなわけです．一方，数学科では，物理と同じように定義をせずに波を語ることは難しいです．波とはこういう写像であって，何回微分ができて，というようなことをしなければならないので，大分勝手が違います．

――そのとき，物理学科と数学科の違いは感じましたか．

そうですね，私のように物理から数学に移ると，至る所でそれは感じましたね．

物理数学は他の授業から数学的な部分が外注されてできたものの寄せ集めだという情況は戦前戦後の昔からあまり変わっていないのではないかと思います．だから，物理学自体は学問としては現代化されていても，根底の部分，つまりそれを記述する言葉としての物理数学はあまり変わっておらず，新しい上積みがあるかもしれませんが，総合的にはまだまだ現代化されていないのではないかと思います．今回の特集では，現代の研究で必要とされている物理数学の代数やトポロジーのキーワードが取り上げられています．これらは物理数学では完全に抜け落ちている部分ですので21世紀物理数学といった位置づけになるのではないかと思います．

――海外の状況はどうでしょうか．

海外の状況は，正直なところよくわかりません．学部の教育レベルは日本のほうが進んでいると聞いていますし，実際に教科書を見てもそう感じます．海外では，例えば，数学でも分厚いドリルのような教科書を使っていて，宿題も何頁から何頁までの計算をしなさい，というような感じです．そういう学部教育なので内容的には海外のほうが貧弱なのかなと感じますが，正確なところはわかりません．

――そうすると，研究者を輩出する土壌というのは，日本のほうがよいのでしょうか．

どうなんでしょう．日本は学部教育はいいのだけれど，大学院からの伸びが海外に比べて今ひとつだと，時々言われることがありますね．もしかしたら教育の仕方にも問題があるのかもしれませんが．日本はオールラウンドというか，例えば，数学でも代数・幾何・解析という基本的な柱があって，そのどれもをちゃんと理解していること，という暗黙の風潮があります．物理でも同じように，場の理論や量子力学などをすべて理解しておくことが前提になっています．もちろん，これらは基礎的事項なので大事なことですが，どれかが欠けると駄目というような風潮のために途中でくじけてしまうのかもしれません．

ところが，海外の大学院生というのは本当に何も知らないような人がいい仕事をして，伸びていくというケースが多々あるんですね．「彼は，今はこんなに頑張っているけど，最初に論文を書いた頃はこんな基本的な質問をしていたんだよ」というような話をよく耳にします．きっと，海外の大学院教育というのは，指導教員が学生に対して非常にクリアな目標を掲げていて，馬の鼻の前に人参をぶら下げるような感じで，とにかく「これやったら？ よくできた！ よし，じゃ次は…」というようにあまり迷うことなく誘導するような教育システムになっているのではないかと思います．だから，大学院生も自分がやったことについては非常によく知っているけれども，やらなかったことについては知らないし，知らなくても別に恥ずかしいとも特に思わないのですね．日本では，もうちょっと幅広く勉強していないと恥ずかしい，などと思ってしまいがちです．大学による違いもあるかもしれません．東大では，先生があれこれ指導するよりも，学生が自由に研究できる環境が大事という風潮もあると思います．実際，指導しすぎて逆に才能を潰してしまう，というケースもあり得るでしょうし，とても有名になった人の中には，指導を受けた記憶がないと言う人もいますので，一概にどちらが良いということは言えません．

2. 物理と数学のギャップ

――先ほど，物理学科と数学科の間には至る所で違いを感じると仰っていましたが，そこに存在するギャップはどうしたら埋められると思いますか．

私も最初，数学ではなぜいちいち定義しなければならないのかということに違和感を感じました．しかし，今は数学者がなぜ定義にこだわるのかということも理解するようになってきました．数学

者はこだわるべくしてこだわっているんですね．結局，数学は論理が命ですから，「たぶん，正しい」と「絶対，正しい」では意味が違うわけです．それは，証明したか，していないか，の違いです．

物理の場合は都合のよい例をたくさん集めてきて，「だからきっとこうに違いない」，という形で進んでしまうし，実際，そういう形の論文が多数を占めます．これは，実験があるために大した間違いが出ずに済んできたからだと思います．しかし，理論物理，特にストリング理論のような分野では，今後，ますます実験が難しくなると思いますので，そうするとやはり数学のように論理の力に頼ることをしないと学問として立ちゆかなくなってしまうのではないかと危惧しています．

数学と物理のギャップを埋められるかと言われれば，私は埋められると思います．やはり，毛嫌いせずに基礎的な言葉をお互いに学んでいくことが重要だと思います．つまり，異文化交流ですよね．交流しようとする意志がなければ交流は生まれないわけですし，それにはやはり相手の言葉を理解しようとすることが必要です．旅行に行ったときにも，挨拶のような最低限の言葉を知っていると非常に楽しめて，見える世界が広がるわけです．素粒子物理や物性物理は物理の中では一番数学に近いと私は思っていますが，もう少し数学と交流があってもいいのではないかと思っています．ただ，なかなかお互いに学部教育などでやるべきことが多いためにそのための時間がとれないのが実情です．物理数学の内容が旧態依然としているような気がしますので，これをもう少し現代化するだけで大分改善されると思います．

――それは物理からも数学からもお互いに意見を出し合って，作っていけばよいのでしょうか？

基本的には物理の側で取捨選択すべきだと思います．物理数学は量子力学が 1920 年代にできてから，必要とされる数学が急に増えて整理する暇がなかった感があります．初めはニュートンの運動方程式を解くだけで，つまり微分方程式を習っていれば物理数学だったのが，ヒルベルト空間論や群論など新しい要素が投げ込まれてきました．それらは整理されず，ごちゃ混ぜの状態になってしまいました．だから，集合や位相などを数学科のように厳密に学ぶ必要はないけれども，もっと「線形性」とか「重ね合わせの原理」のような基本的な概念を押さえておけば，線型微分方程式の解法も量子力学の重ね合わせの原理も行列の対角化も全部同じように扱えるので，習う側の負担も軽減できるわけです．その辺りは物理の側で少し考えて取り入れられたらいいのではと思っています．

一方，厳密な定義にこだわる数学者に対して言いたいのは，学生の頃，初学者の感覚を忘れないでいてほしいということです．最初に習った頃は，なかなかイメージが湧かなかったはずですから．

例えば多様体の定義を見ると，「位相空間と○○写像と○○と○○との組であって△△をみたすもののこと」というような無味乾燥なわけのわからないことが書かれています．そういう定義ももちろん大事ですが，例えば「多様体というのは地図が作れる図形である」などといった，イメージの伝わる一言，少しかみ砕いた言い方をもっとしていく必要があると思います．そうすれば，数学に対する理解者も増えるのではないかと思います．執筆者の方々には重荷かもしれませんがそういう意味で，今回の特集は役に立つのではないかと思います．

数学と物理の交流という点で言えば，数学科にいる先生は，物理に興味がある人が多いです．例えば，場の理論の「繰り込み理論」などのアイデアが，自分の研究に使えそうだと思っている人が数学者の中に結構います．ですので，物理学者と交流したいと思っている人は潜在的にいるのではないかと思います．ただ，言葉や考え方の壁が存在しているために交流が阻害されているのではないでしょうか．

3. 研究者になるきっかけ

——先生が物理や数学に興味を持ったきっかけは何でしょうか.

私がそもそも物理に興味を持つようになったきっかけは，例えば転がる玉の運動とか，そういう力学的な問題でした．まだ子供でしたが，やってみなければわからないことが計算で予測できる，ということを聞いて非常に不思議に感じましたね．実際，投げてもいないのにどこに落ちるかが何で計算できるのか，自然界のことが式などで表現できることに不思議さを感じました．そういう意味では，興味の持ち方がもともと少し数学がかっていたのかもしれませんね．そう思って，本を読み出すと $\sqrt{\ }$ とか π とか微分とかいろいろ出てくるわけです．例えば，バネの振り子と電気回路の振動は全部同じような sine カーブで書かれるなど，見かけは違うのだけれども同じ数学的構造を持っているということに興味がありましたね．

——先生が影響を受けた定理や数式はあるでしょうか.

具体的にこの定理とか数式というのは特に覚えていませんが，出てくると何となくワクワクしたことは覚えています．もともと物理と数学に対して同じように興味を持っていました．しかし，本格的に数学の本，例えば代数の本を読んでみようと本を開いてみると，そこにあるのは群とか環とか体とか非常に抽象的なものばかりでした．群とか環とかがどう使われているのか知らないので，面白さがよくわかりませんでした．当時，高校生くらいだったのですが，数学は自分には向いていないのかなと思いましたね．

——研究者になりたいと思う何か特別なきっかけはあったのでしょうか.

特にきっかけというものはありませんでしたが，中学くらいで湯川先生の本や朝永先生の『スピンはめぐる』などを読んでいくうちに何となく素粒子や相対論の世界に憧れのようなものが膨らんでいきました．

電気回路をいじるのが子どもの頃から好きだったのですが，そのことが今の研究の指向に少し関係があるように思います．例えば $f(f(x))$ という関数があるとすると，回路作成の場合のように，f という関数を表す素子 2 個を直列に並べることを想像してしまいます．つまり，何かそういった計算とか関数，あるいは写像を何か一つのコンポーネントの結びつき方として，回路を組み替えるとどうなるかというような発想が好きですね．今回の特集で言うと「圏と関手」はそれを数学的に整備したものと見ることもできます．何か簡単なものを組み合わせて全体が作られる，そういう作られ方に興味があるというのは，電気回路作成の影響があるのかもしれませんね．

4. 入門のための講座

——先生が関係されている物理数学に関連した講義，講座などは何かありますか？

東大数理にいると面白いものが結構あって，学生に混じって大学院生向けの講義や集中講義，研究集会をよく覗いています．物理とは全く関係のなさそうな分野の話でも，案外素粒子の考え方に通ずる部分を発見することがあります．他にも例えば，中央大で年に何回か不定期でやっている “Encounter with Mathematics” という非専門家向けの講座があり，私は時間が許せば参加するようにしています．2 日間講義があって，最初は入門的なことから始めて，最後はワインパーティーで締めるというなかなか愉快な研究集会です．フランスでそういう講座があって，それを参考にしたようです．物理の人が聞いても面白いテーマが結構ありますので，一部の数学フリークだけでなく，他分野の方も覗いてみるといいのではないかと思います．

また，いろいろな大学で公開講座をはじめ，各種の研究集会や講演会があり，大変刺激的ですよ．

5. これからの学生に望むこと

――物理系の学生に特に望むことはありますか.

数学がなければ物理が研究できないというわけではないのですが，数学は，普通とは違う角度からの見方をもたらしてくれる可能性があります．つまり，数学は様々なものを抽象化しているので，例えば，振り子の運動と電気回路の振動のように一見違うように見えるものも数学から見れば全く同じに見えるわけです．これは簡単な例ですが，そういったことは物理に限らず生物など他の分野でもあり得ることです．だから，数学は勉強して損ということはあまりなく，むしろ，ものの見方が広がるのではないでしょうか．数学は狭い，融通が利かないと思われがちですが，抽象したおかげで発想が自由になり，これまでは違うと思っていたものが，数学的には実は同じものだった，というような発見があるのではないかと思います．ですので，食わず嫌いにならないでほしいと思います．

6. 興味があることやアピールしたいこと

――今，興味があることはありますか.

研究の夢ということでは，ストリング理論や量子化された幾何学というものを，よりしっかりとした枠組みで，定式化したいですね．少なくともどういう方向に進むべきかということを見やすい形にしたいと思っています．例えば，Einstein の一般相対性理論のようなものが目標型です．一般相対性理論は相対性原理と若干の仮定を置くだけでいろいろな驚くべき結果が出てきました．弦理論も今では膨大な分野になって全体像をつかまえることが困難になっていますが，本当の基本的な原理はごくわずかで，そこからすべての結果が演繹的に出てくるようにできたらいいなと思っています．そうすると，必ずしも実験による検証ができなくても，相当に説得力を持った理論に生まれ変わるのではないかと思っています．

――特集を通してアピールしたいことはありますか.

物理に限らず，人文系も含めたサイエンス全般に対して，数学は普遍的な言葉を提供していますし，また，数学的なものの見方をいろいろな学問に対して使うことで，今まで見えなかったものが見えるようになると思います．そのためには，ある程度数学を勉強していないとわからないと思いますので，今回の特集が現代の数学というものに触れるきっかけになればと思います．数学は積み重ねの学問ですので，2 千年前に発見された定理でも古くなく今でも使えますし，1 万年後でも使えるわけです．インターネットのパケットを送る仕組みなど至る所で数学が使われているように，古びなくて汎用性のあるものは大事に受け継いでいくことがいいのではないかと思います．また，数学も理論物理も人の営みですので，受け継ぐ人がいないと廃れてしまいます．理論物理については，実験的検証はますます難しくなるでしょうから，論理的検証という意味でも，得られた成果を整理して次世代にうまく伝えてゆくためにも，数学の世界が必要になると思いますし，そうなるべきだと思います．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました.

(2007 年 7 月，東京大学駒場キャンパスにて)

(かとう・あきし，東京大学大学院数理科学研究科)

非平衡統計力学



早川尚男著，B5 判，168 頁，本体 1790 円，サイエンス社

「非平衡統計力学」という表題の書物は幾つかあるが，それぞれに守備範囲が異なり特徴がある．すなわち，統計力学の基礎を中心にして方法論の展開に重点を置くものがある一方で，個々の非平衡系をとり挙げて現象論的な説明を行なうものがある．

本書は前者の範疇に属する．全体は 11 章からなり，第 1 章の歴史的概観から始まり第 4 章までが一つのまとまりである．ここではボルツマンの視点が前面に出ており，ボルツマン方程式の導出，ボルツマンの H 定理，相対エントロピーなどが扱われている．他の本ではあまり書かれていない熱伝導率の計算過程が詳述されている．

第 5 章は中間考察とでも言うべき箇所で，不可逆性をもたらすもの，という表題の下でエルゴード性と混合性が論じられ，バーコフの定理，カッツのリングモデルの説明がある．本書の特徴だが，後の第 8 章で再びとり挙げられる，Jarzynski 等式が第 5 章でまず論じられている．この恒等式は 10 年ほど前に，仕事とヘルムホルツの自由エネルギーとを結ぶ関係式として見出されたものである．この等式が熱力学の範疇を越えていると考えられているのは，系になされる仕事が操作速度に依らないからである．この等式に関しては熱力学第 2 法則とどう関わるかなど，様々な議論がある．

第 6 章，第 7 章では，ブラウン運動と揺動散逸定理が主な話題である．アインシュタインによるブラウン運動理論の概要が示された後，アインシュタインが見つけた関係式がいわゆる揺動散逸定理の嚆矢であることが述べられる．次いで揺らぎの問題に入り，ランジュバン方程式が導入されて輸送係数に対するオンサガーの相反定理に至る．さらに，物理量の相関関数とパワースペクトルとは互いにフーリエ変換でつながっていることを示すウィーナー・ヒンチンの定理から，物理量の時間変化を記述するランジュバン方程式と物理量の確率分布の従うフォッカー・プランク方程式との関係を論じて，揺動散逸定理に至る．

第 8 章は本書の特徴を表し，揺らぎの定理，が詳しく論じられている．この定理は，エントロピー生成率の時間平均量が従う確率分布に関するものである．この確率分布は単純な関係式を満足している．そのことの証明と線形応答理論（第 9 章で論じられる）および Jarzynski 等式との関係が論じられ，この定理の重要性が強調される．

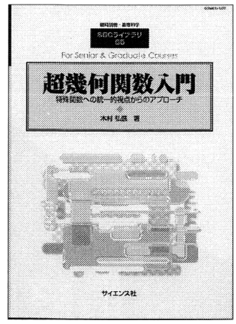
第 9 章は線形応答理論．この理論は平衡状態の近傍にある非平衡系の振舞いを外場の 1 次の範囲で正しく記述するものである．この理論に関する簡単な歴史回顧があり，その後，密度行列を外場で展開するという久保による標準的な方法によって，輸送係数が導出される．次いで，この表式を用いて量子論的な揺動散逸定理が示されている．以上は外場に対する応答を論じたのだが，熱的な摂動に対する応答にも言及されている．

ランジュバン方程式はランダムな揺動力を含む現象論的な方程式だが，これをミクロな立場から導くことができないか，という疑問が生じる．第 10 章では射影演算子法という方法論によって，力学の方程式からランジュバン方程式を導くことがなされている．そうであれば，可逆な力学方程式から出発して非可逆な方程式が導かれたことになるが，射影演算子法によって導かれた基本式は力学の基本方程式からの恒等変換であるから，付加的な条件の導入が必要となることが指摘されている．

最後の 11 章の表題は，運動論的手法の輸送現象への応用，である．有限領域での熱伝導，電気伝導の問題が主なテーマとしてとり挙げられている．最近，メソスコピックな系の電気伝導に対してよく用いられているものに，ランダウアーの公式というものがある．化学ポテンシャルの異なる系につながっている試料の実験解析に有効である．この公式の導出は簡単だが，線形応答理論との関連も本章で考察されている．

上述の如く，本書は基礎的な視点からよくまとめられている．序文によれば学部の 4 年生と修士 1 年の合同授業に本書の内容が用いられているとのことだが，学部生にはしんどい箇所もあるだろう．本書を教科書として用いる場合，そのような部分に対して教員が適切な補いをすればよい．

柴田　文明（お茶の水女子大学大学院
人間文化創成科学研究科）



超幾何関数入門

特殊関数への統一的視点からのアプローチ

木村弘信著，B5 判，200 頁，本体 1857 円，サイエンス社

この『超幾何関数入門』は，合流型を含む超幾何関数の一族と，その多変数への拡張についての現代的な取扱いを，著者等の研究成果を踏まえつつ基礎から解説した書物である．同様の趣旨で超幾何関数を扱った書物としては，青本・喜多[1)]，吉田[2)]，原岡[3)]などがあり，いずれも個性溢れる好著であるが，合流型を主体として現代的アプローチを徹底して展開したのは，本書が最初であろう．多変数化も含めて超幾何関数研究の歴史は古いが，1970 年代の後半から 80 年代に幾つかの新しい潮流が生まれた．その「現代的」潮流の一つは，青本と Gelfand によるグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(k,n)$ に付随する超幾何関数である（射影空間 $\mathbb{P}^{k-1}$ 内の n 個の超平面の配置に付随する超幾何関数とも言う）．$\mathrm{Gr}(k,n)$ の超幾何関数とは，k 変数の 1 次同次式 n 個の複素冪の積の積分を，1 次式の n 組（n 個の超平面の配置）を「変数」とする多価関数と見たものである．$k=2$ の $\mathbb{P}^1$ の場合は本質的に 1 次元の積分であり，$n-3$ 変数の古典的超幾何関数 F_D に帰着する（1 変数の場合 Gauss，2 変数の場合は Appell の F_1）．

本書の目標は，このグラスマン多様体の超幾何関数の考え方を発展させ，合流型を含めた「一般超幾何関数」の統一的理論を展開することである．その要点は，$GL(n)$ のジョルダン群の指標を利用して被積分関数に指数関数型の因子を適切に組み込むことにある．本書は，このアイディアで $\mathrm{Gr}(2,n)$ に付随する「一般超幾何関数」を導入し，その様々な性質を論じつつ，1 変数及び多変数の古典的（合流型）超幾何関数を，統一的視点から捉え直したものである．ジョルダン群は n の分割 λ に付随して定義されるので，n の分割を指定する毎に，一般超幾何関数の「合流型」が決まる．$n=4$ の 1 変数の場合は，5 個の分割 $\lambda=(1,1,1,1),(2,1,1),(2,2),(3,1),(4)$ がそれぞれ，Gauss, Kummer, Bessel, Hermite-Weber, Airy の（合流型）超幾何関数に対応する．$n=5$ の 2 変数の場合は，5 の分割に応じて Appell の F_1 の一族として 7 個の型が生じる．$n=3$ の分割 $\lambda=(1,1,1),(2,1),(3)$ に対応するのは，超幾何関数としては 0 変数の，ベータ関数，ガンマ関数，ガウス積分である．本書で議論を $k=2$ の 1 次元の積分の場合に限定したのは入門書としての役割を考慮したものと推察するが，そのお蔭で記述が簡明となり，「統一的視点」の意義がより鮮明になっていると思う．

本書の導入部には，ベータ関数やガンマ関数の複素解析的取扱いについての丁寧な解説がある．その後の第 3 章は Gauss の超幾何関数とその合流型についての基本事項（級数表示，オイラー積分表示，微分方程式など）が手際よくまとめられた章だが，最後に隣接関係を導出する「因子分解法」が紹介されているのも面白い．第 4 章「グラスマン多様体上の超幾何関数」では，Gauss の超幾何関数のオイラー積分表示に無限遠点を取込み $\mathbb{P}^1$ 上の 4 点を対等に扱うことで $\mathrm{Gr}(2,4)$ の超幾何関数に至ること，合流型超幾何関数のオイラー積分表示をジョルダン群の指標を通じて理解することを経て，自然に $\mathrm{Gr}(2,n)$ の「一般超幾何関数」の定義に到達する．後半では，その一般超幾何関数の微分方程式と様々な積分表示の導出．また，Appell や Humbert の 2 変数（合流型）超幾何関数，Horn のリストなど，多変数超幾何関数の古典的理論の紹介の後，$\mathrm{Gr}(2,n)$ の一般超幾何関数との関係についての言及がある．超幾何方程式の Kummer の 24 個の解や，その合流型での対応物は，ジョルダン群に付随するワイル群による対称性として統一的に扱える（第 5 章）．隣接関係はリー環 $\mathfrak{gl}(n)$ のジョルダン群による広義のルート分解を通じて系統的に導かれる（第 6 章）．こうして対称性や隣接関係の完全な記述が得られる．このような議論に必要な群論的手法についても丁寧な解説がある．

初めて超幾何関数を学ぶ人には，きめ細かい配慮の行き届いた入門書として，この分野の研究者には，様々な貴重な情報を提供してくれる専門書として，超幾何関数に少しでも関わりのある人には必携の書である．

参考文献

1) 青本和彦・喜多通武：『超幾何関数論』シュプリンガー・ジャパン，1994.
2) 吉田正章：『私説超幾何関数—対称領域による点配置空間の一意化』共立出版，1997.
3) 原岡喜重：『超幾何関数』朝倉書店，2002.

野海　正俊（神戸大学大学院理学研究科）

BOOK REVIEW

宇宙論的スケールの重力：ダークエネルギーは幻影か？

前田 恵一

ミクロスケールでは量子重力理論が未完成という問題とも関係して，アインシュタインの一般相対性理論は何らかの形で修正されなければならないのは明らかだ．一方，太陽系など巨視的なスケールでは一般相対性理論は非常によい精度で正しいことがわかっている．しかし，もっと大きなスケールでもまた一般相対性理論を超える重力理論が必要となるかもしれない．宇宙論最大の謎「ダークエネルギー」がその鍵である．

18.1 ダークエネルギー

1998年，2つの観測グループが衝撃的な観測事実を発表した[1,2]．宇宙が加速的に膨張しているというのである．重力は「万有引力」であるので，すべての物体どうしはお互いに引き合う．ビッグバンで膨張を始めた宇宙は，宇宙の物質どうしの引力によりその膨張速度を次第に減らしていく．丁度，放り投げた物体が，地球の引力に引かれるためその上昇速度を落としていくような感じでである．宇宙がずっと膨張し続けるか，どこかでUターンして収縮に転ずるかに関係なく，宇宙の膨張は減速していくはずであった．しかし，現実の宇宙は現在加速されながら膨張しているというのである．

18.1.1 ダークエネルギーの存在

どうして宇宙が加速していることがわかるのであろうか？ ビッグバン宇宙論の成功により，我々は宇宙がアインシュタインの一般相対性理論で正しく表されていることを知っている[3]．その宇宙の膨張はフリードマン方程式

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3}\rho_{\rm M} \qquad (18.1)$$

で記述される．ここで a は宇宙の大きさを表すスケール因子で，$H = \dot{a}/a$ は宇宙膨張率を表すハッブル膨張係数である．また $k = 0, \pm1$ は3次元空間の曲

率の符号を，Λ はアインシュタインが導入した宇宙定数を，$\rho_{\rm M}$ は宇宙の物質密度を表している．宇宙モデルを決める密度パラメータを

$$\Omega_M = \frac{8\pi G\rho_{\rm M}}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k = \frac{k}{a^2 H^2} \tag{18.2}$$

と定義すると，この式は

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda - \Omega_k = 1 \tag{18.3}$$

となる．

ハッブル膨張係数は，宇宙の密度や宇宙定数によって時間的に変化する．これを観測的に決定できれば，宇宙の膨張率が時間と共にどう変化しているかがわかる．しかし，ハッブル定数（現在の膨張率）すら決定するのに非常に紆余曲折があり，その決定は非常に難しい[3]．これを決めるには，宇宙にある標準光源までの距離と後退速度を正確に決定しなければならない．距離の推定には天体の絶対光度が，後退速度の決定には赤方偏移がわかればよい．赤方偏移は測定ではっきりするが，絶対光度は個々の天体によって異なるため，その推定が難しい．特に今の場合，宇宙論的な距離にある天体に対し精度よく決定しなければならない．そこで採用されたのがタイプIa型の超新星である．これは白色矮星の周りを回るコンパニオン星からの物質降着によって起こる超新星であることがわかっており，その光度曲線と絶対光度の関係がよく知られている天体である．明るいので宇宙論的距離といった非常に遠くまで観測可能で，宇宙膨張の変化を調べるのに適している．図 18.1 がその結果で，観測された超新星のデータと宇宙モデルを与えたときの理論曲線が数本描かれている．これによると宇宙定数をゼロとした宇宙モデルは他のパラメータをどのようにとっても，観測値と合わない．一方，平坦な宇宙モデル（$\Omega_k = 0$）では $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ が観測値をよく説明する[傍注1]．

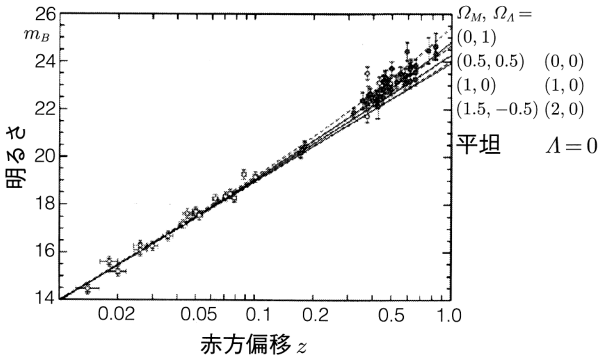


図 18.1　タイプ Ia 型超新星を用いた赤方偏移と明るさの関係[2]．いくつかの宇宙モデル（平坦で $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0,1), (0.5, 0.5), (1,0), (1.5, -0.5)$ としたもの，および $\Lambda = 0$ で $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0,0), (1,0), (2,0)$）が曲線で示されている．$\Lambda = 0$ のモデルは観測値と一致しない．平坦だとすると $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ が観測値と合う．

［傍注1］　この観測以前にも宇宙定数 Λ の存在を示唆する観測はあった[4]．

2つの独立なグループによる観測結果であったが，研究者たちはこの結論に半信半疑であった．そうこうするうちに，宇宙背景輻射の温度ゆらぎのより正確な観測を目的とした観測衛星 WMAP（Wilkinson Microwave Anisotropy Probe）が打ち上げられ，驚くべき精度で宇宙のモデルが決定された[5]．宇宙モ

表 18.1　WMAP による宇宙背景輻射から決定された宇宙パラメータ[5]．宇宙年齢は1年目のデータ解析結果．$h = H_0/$（$100\,[\mathrm{km/s/Mpc}]$）は規格化されたハッブル定数．Ω_M, Ω_B, $\Omega_0(=\Omega_\Lambda+\Omega_M)$ はそれぞれ宇宙の物質，バリオン，および宇宙の全エネルギーの密度パラメータである．ΛCDM モデルは，宇宙定数 Λ と冷たいダークマター（CDM）が存在する曲率ゼロの宇宙モデル，SNLS, HST は他の観測実験 SuperNova Legacy Survey, Hubble Space Telescope のデータ．

宇宙パラメータ	解析結果	使ったデータと宇宙モデル
宇宙年齢	137 億年（±1%）	WMAP（ΛCDM モデル）
ハッブル定数 h	$0.73\ ^{+0.03}_{-0.03}$	WMAP（ΛCDM モデル）
$\Omega_M h^2$	$0.127\ ^{+0.007}_{-0.013}$	WMAP（ΛCDM モデル）
$\Omega_B h^2$	$0.0223\ ^{+0.0007}_{-0.0009}$	WMAP（ΛCDM モデル）
Ω_0	$1.015\ ^{+0.020}_{-0.016}$	WMAP+SNLS
	$1.010\ ^{+0.016}_{-0.009}$	WMAP+HST

デルを仮定し，観測された温度の非等方性と一致するようにパラメータを決めるのであるが，その結果は表 18.1 のようであった．

これによると宇宙年齢は 137 (±1) 億年，曲率はほぼゼロの平坦な宇宙で[傍注2]，宇宙を構成する物質のほとんどがダークマター (22%) とダークエネルギー (74%) ということになる．我々自身を構成する普通の物質（バリオン物質）はほんの数%しか存在しない (図 18.2)．

［傍注2］ $\Omega_0 = 1$ の場合，$\Omega_k = 0$ となり，平坦な宇宙モデルになる．

18.1.2 ダークエネルギーは奇妙な物質？

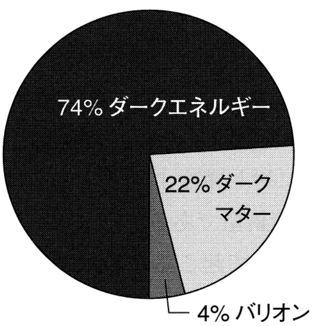


図 18.2　宇宙を構成する物質の割合．既知の物質（バリオン）はほんの 4%にすぎない．

宇宙膨張が加速しているかどうかを見るにはアインシュタイン方程式のもう一つの式

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho_M + 3P_M) \qquad (18.4)$$

を見ればよい．ここで P_M は宇宙の物質を流体近似したときの圧力である．$\ddot{a}$ は「加速度」を表しているが，宇宙項がなく，普通の物質（$\rho_M > 0$, $P_M \geq 0$）を考える限り加速度が負，つまり宇宙膨張は減速していることになる．

しかし宇宙膨張が現実には加速しているということは宇宙定数が正であるか，$\rho + 3P < 0$ を満たす奇妙な物質を考えなければならない．そこで，宇宙定数 Λ や奇妙な物質のエネルギーをまとめてダークエネルギーとし ρ_{DM} と表す[傍注3]．ダークマターを含む普通の物質のエネルギーを ρ_M とすると全エネルギーは $\rho_0 = \rho_{DM} + \rho_M$ と表される．

［傍注3］ 宇宙定数は真空のエネルギーと等価（$\rho_{\mathrm{vac}} = \Lambda/8\pi G$）で，状態方程式は $P_{\mathrm{vac}} = -\rho_{\mathrm{vac}}$ である．

ダークエネルギーとしては，これまでの観測から宇宙定数と考えることもできる．実際，ダークエネルギーの状態方程式を $P_{DM} = w\rho_{DM}$ としたと

き，観測からの制限は，宇宙が平坦だと仮定すると $w = -1.02^{+0.13}_{-0.19}$[6] または $w = -0.967^{+0.073}_{-0.072}$[5]，平坦だと仮定しなくてもいくつかの観測を合わせて $w = -1.08^{+0.12}_{-0.12}$[5] である．

では何故素直に宇宙定数とせず，ダークエネルギーなるものを考えるのであろうか？ それはその大きさに関係する．通常，場を量子化すると真空のエネルギーが現れる．これは2枚の金属板間に働く力（カシミア・エネルギー）として電磁場の場合には実験的に確認されている[7]．そのエネルギー・スケールは，考えている場の典型的な値になると予想される．ところが観測を説明するのに必要な宇宙定数の値は理論から予想される値から何桁も小さくなければならない．例えば，プランクスケールの真空のエネルギーは現在存在すると考えられる宇宙定数（真空のエネルギー）の120桁も大きい．超対称性を考えると，フェルミ粒子とボーズ粒子の真空のエネルギーに対する寄与が逆で打ち消し合うため，真空のエネルギーはゼロになる．しかし現在の宇宙ではもちろん超対称性は破れており，そのエネルギー・スケールの真空のエネルギーが存在することになる．その値を考えても観測値より60桁大きいのである．これは宇宙項問題とも呼ばれており，素粒子物理学の永年の課題である．

ダークエネルギーの問題はこの宇宙項問題よりも深刻である．それは，この「宇宙定数」の値が「現在の宇宙密度」に極めて近いということである．宇宙定数は文字通り「定数」である．通常の物質は体積が倍になると，密度は半分になる．宇宙の膨張とともにその密度は減少する．現在，物質密度が30%弱で「宇宙定数」が70%強ということは，宇宙が現在の10分の1の大きさのときは，物質密度が99.77%を占め，宇宙定数は残りのわずか0.23%であった．逆に宇宙が現在の10倍になるときには，物質密度は臨界密度の0.43%しかなく，宇宙定数が99.57%を占める．つまり，宇宙のエネルギーにおいて物質密度と宇宙定数がほぼ同じ程度（3 : 7）寄与するのは宇宙進化の中のほんの限られた時期だけなのである．その限られた短い期間に，たまたま我々人類が生きているというのはあまりにも偶然すぎないかという疑問である．「宇宙の偶然性問題」と呼ばれる．

この疑問を解決するために，ダークエネルギーは宇宙定数（または真空のエネルギー）ではなく，ある基本場のエネルギーとするアプローチが考えられた．つまり，宇宙定数に似るが時間的に変化し得るエネルギーを考えるのである．

その多くはスカラー場を考える．初めに提案されたのがクィンテッセンス場である[8)傍注4)]．スカラー場 ϕ のポテンシャルとして特別のもの（例えば $V = \mu^{q+4}/\phi^{q}$）を考えると，非常に一般的な初期条件から始めても，宇宙の進化において輻射優勢・物質優勢の時期が存在し，やがてこの場のエネルギーが優勢になり，宇宙は加速膨張を始める．現在に近くなってから加速膨張を始めるためにはポテンシャルのエネルギースケール μ を精緻に選んでおく必要がある．例えば，q=3 に対しては $\mu \sim 6.25 \times 10^{-18} M_{PL}$ でなければならない．

その後，クィンテッセンス場は $w = -1$ 近くの値を予言するのが難しいこともあって，もっと奇妙な物質も考えられるようになった．クィンテッセンス場は，物質の状態方程式で見ると $w = (\dot{\phi}^2 - 2V)/(\dot{\phi}^2 + 2V)$ であるの

［傍注4］ 古代ギリシャの哲学者アリストテレスは，地上の世界と天上の世界を明確にわけ，地上の物質は「火・水・気（風）・土（地）」の4つの元素からなるとし，天上の世界は，第5元素と呼ばれるものからなっていると考えた．この第5元素であるクィンテッセンス（quintessence [quinta essentia]）をもじって名付けられた．

で $-1 < w < -1/3$ に対応している．スカラー場の運動項の符号を変えると $w < -1$ といった「物質」（ゴースト場）も考えることができる．このような「物質」はファントム場と呼ばれている．また，宇宙の進化の中でクィンテッセンス優勢からファントム優勢となるクィントム場なるものや非常に奇妙な状態方程式（$P \propto -\rho^{-1}$）を与えるチャプリギン（Chaplygin）ガスまで議論されている．

我々がまだ全くその正体を知らないこのような奇妙な物質が本当に宇宙を満たしているのであろうか？ そのような変なものを導入したくなければ，別の考え方をすればよい．

18.1.3 ダークエネルギーは重力の新しい効果？

宇宙の加速膨張が「奇妙な物質」のせいだと考えなければならなかったのは，一般相対性理論を基礎にしたフリードマン方程式 (18.1) が正しいとしたからである．しかし一般相対性理論が本当に正しいとわかっているのは太陽系近傍の実験と連星パルサーの軌道観測だけである．それらより遙かに大きいスケールの宇宙を考えるときに一般相対性理論が正しいかどうかまだわからない．

もっともビッグバン宇宙論が成功していることから，とんでもない重力理論を考えることはできないであろうが，一般相対性理論とは違った重力理論を考えることで，ダークエネルギー問題が解決されるかもしれない．アインシュタイン方程式は

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{18.5}$$

と表される．観測で宇宙の加速膨張が見つかったというのは時空の時間変化の様子であるから，左辺の曲率部分がわかることになる．そうすると，右辺の物質として奇妙な物質「ダークエネルギー」を考えないといけなくなる．一方，もし「奇妙な物質」を考えたくなければ，左辺の曲率項を変更すればよい．

しかし重力理論を一般化するには無限の可能性がある．何らかの指針が必要であろう．現在は，いろいろな角度からその可能性が考えられている．この連載でも，ダークエネルギー問題とは別の観点から一般相対性理論を拡張する可能性について紹介してきた[9,10]．

ブランス・ディッケ理論に代表されるスカラー・テンソル重力理論，超紐理論の有効作用に現れる曲率の高次項などの補正項，ブレイン宇宙における有効重力理論などなどである．その中でもブレイン宇宙モデルの一つである DGP モデルが注目されているが[11]，理論自体に欠陥（ゴースト）があるため，ダークエネルギーを説明するのは難しそうである．そのほかの重力理論でも十分納得のいくモデルは提唱されていない．

18.1.4 ダークマターも修正重力理論で？

ここまでダークエネルギーのみについて話をしてきたが，ダークマターについても少しだけ述べておこう．ダークマターは，銀河や銀河団の周りに局在し，その状態方程式も奇妙なものではない．何らかの未知の粒子という可能性が高い．超対称性粒子（ニュートラリーノ）やアキシオンなどがその有力候補に挙がっている．そのような標準的な考えとはちょっと異なる興味深いアプローチとして，

ダークマターをニュートン重力を修正することで説明しようという試みがある．ミルグロム（M. Milgrom）によって提案されたMOND（Modified Newtonian Dynamics）である[12)]．これは加速度が非常に小さいところでニュートンの運動方程式が変更を受けると考える．具体的には，運動方程式を

$$\mu(|\boldsymbol{a}|/a_0)\,\boldsymbol{a} = -\nabla\Phi_N \tag{18.6}$$

とする．ここで，Φ_N は重力ポテンシャルである．$\mu(|\boldsymbol{a}|/a_0)$ は加速度 $\boldsymbol{a}$ の関数で，$|\boldsymbol{a}| \gg a_0$ のとき $\mu \approx 1$ とし，通常のニュートン力学が成立するようにするが，$|\boldsymbol{a}| \ll a_0$ のときには $\mu \approx |\boldsymbol{a}|/a_0$ と仮定し，運動方程式を大きく変更する．$a_0 \sim 10^{-8}\mathrm{cm/s^2}$ とすると，ダークマター存在の観測的証拠の一つである渦巻き銀河の回転則などがうまく説明できる．ダークマターを導入しないで，重力理論の修正をすることで観測結果が説明可能になるという点ではこのアイデアは面白い．しかし，この理論は，現象論的に運動方程式を修正したもので，基礎重力理論とは考えにくい．そのような状況で，ベッケンシュタイン（J. Bekenstein）は，ニュートン極限がMONDとなるスカラー・ベクトル・テンソル理論（相対論的重力理論）を提唱している．これが，本当にダークマターの観測的証拠をダークマターなしで説明する理論になるかどうかはわからないが，修正重力理論が「未知の物質」を説明するかもしれないという意味で興味深い試みと言える．しかしながら，銀河衝突の観測などから光るバリオン物質とは異なる場所に光っていない重力源が存在するという，ダークマターの直接的証拠も見つかってきており[14)]，そのようなアプローチの形勢はよくない．

18.2 太陽系近傍の謎と重力理論

太陽系近傍の重力は，ニュートン重力理論やそれをより精密にした一般相対性理論で十分に正しく表されるといった．しかしながらそのよくわかっているはずの太陽系においても未だに解決されていない謎が存在する．パイオニア異常と呼ばれる現象である[15)]．それは，1972年3月2日，および1973年12月4日に打ち上げられた人工衛星パイオニア10号と11号の軌道に関する謎である．2つの衛星はドップラー追跡法を使って正確にその位置および速度が測定されている．それらは木星および土星に接近後，双曲線軌道で太陽系を脱出しつつある．パイオニア10号は2005年1月1日現在，太陽から87.06天文単位離れたところを，速度12.24 km/s で航行している．

これらの衛星が20〜70天文単位の距離にあったときの軌道を相対論的効果も入れ詳細に解析した結果，非常にわずかではあるが，ドップラー偏移が青いほうへ一様に変化しているのが見つかった．$\dot{f}_P \sim (5.99\pm0.01)\times10^{-9}\mathrm{Hz/s}$ の割合で変化しているのである．これを衛星に加わっている余剰加速度と見なすと，その値は

$$a_P = (8.74 \pm 1.33) \times 10^{-8}\mathrm{cm/s^2} \tag{18.7}$$

となる（図 18.3）．この一定加速度がほぼ太陽の方向に向かって余分に働いて

いるというのである．太陽や惑星の重力はもちろん，衛星に加わると思われるすべての力を考慮しているが，この余剰加速度は説明できていない．

この値は，太陽から 2,600 天文単位離れた位置にあるときの太陽による重力加速度と同じ程度であるので，極めて小さい．そんなに小さな値なので，太陽からの輻射や太陽系内のダスト，さらにはダークマターの影響や，また人工衛星自身による機械的誤差など，様々な原因が考えられる．それらをすべて誤差評価し，どうしても説明できない量として残った値が上の数字である．現在のところこの加速度異常の原因は全くわかっていない．従来の物理学をもとにまだ検討し忘れている効果が原因とする考えと，新しい物理学がその背後に隠れているとする考えとの両面から解析が続けられている．この問題をさらに興味深くしている事実として，この加速度異常が，ハッブル定数と光速度からつくられる加速度 $a_H = cH_0 \sim 10^{-7}$ cm/s^2 に極めて近いということである．このことから，原因を宇宙論的起源に求める研究者もいるが，もっともらしい説明は今のところない．

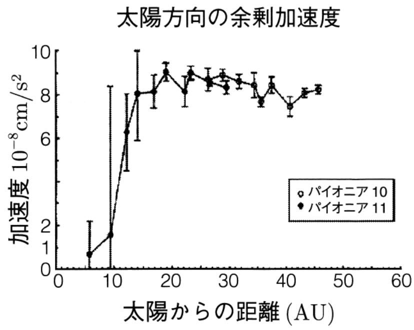


図 18.3　パイオニア 10 号，11 号の加速度異常[15)]．考えられる効果をすべて考慮した後も，太陽方向に一定の余剰加速度が存在する．

また，最近，地球・太陽間の平均距離「天文単位」(AU) がだんだん大きくなっているという話もある．地球と他の惑星間の距離の精密測定により，天文単位が永年的に 100 年間で 15±4 m の割合で増えているというのである[16)]．この話の信憑性についてはまだこれから十分検討する必要があるが，よく知っていると思っている太陽系においても未知の（重力？）現象がまだ存在するのは興味深い．

18.3 現代の「エーテル」と「水星の近日点移動」？ ——新しい物理法則登場の予感——

ダークエネルギーやパイオニア異常の謎の存在は，相対性理論以前の状況に似ている．光（電磁波）は波であるが，「波は媒質中を伝播する」という常識があったため，光を伝えるための媒質「エーテル」の存在が当然のこととして考えられた．そのエーテルを見つけようといろいろな実験が行われたが，結局エーテルの存在は確かめられなかった．この結論は当時の常識からするととても不思議なものであった．その問題を解決したのが，アインシュタインの特殊相対性理論で，光速度不変の法則を前提とすることで，実験結果を見事に説明した．エーテルは存在しなかったのである．その特殊相対性理論は「絶対時間の否定」という科学史上最も重要な事実の一つを明らかにすることになった．今観測されているダークエネルギーは，これまで我々が正しいと信じてきた法

則が間違っていなければ存在することになる．しかしながら，そんな奇妙な物質が宇宙を満たしているとはとても信じがたいというわけだ．まさに「現代のエーテル」のように見える．

一方，一般相対性理論以前には「水星の近日点移動」の問題があった．ニュートン重力理論ではどうしても説明できない近日点移動の残差が存在した．しかし，これは必ずしもニュートン重力の問題とは言い切れなかった．結果的には重力理論の変更につながったが，太陽が扁平していれば説明可能であったし，他にも原因を探すことができた．そういう意味で，パイオニア異常は「現代の近日点移動」と言えるかもしれない．いろいろな原因が考えられるが，満足のいく説明はまだない．しかしそれが新しい物理学に導くかもしれない．

このように巨視的なスケールにおける宇宙の謎が新しい重力理論，さらには新しい物理学を拓く鍵となるかもしれない．今後の宇宙観測と重力理論の進展に注目したい．

［謝辞］　この連載も今回で最後になりました．ずっと執筆できなかったものが，連載にして頂いたおかげで，ようやく日の目を見ることになりました．毎回締切を守らなかったずぼらな著者が何とか最後までたどり着けたのは，ひとえに数理科学編集部，特に伊崎さんのおかげです．ありがとうございました．

参考文献

1) A.G. Riess *et al. Astron. J.* **116** (1998) 1009; B.P. Schmidt *et al. Astrophys. J.* **507** (1998) 46.
2) S. Perlmutter *et al. Astrophys. J.* **517** (1999) 565.
3) 前田恵一「重力理論入門」第 6 回，数理科学（2006 年 9 月号）.
4) M. Fukugita, F. Takahara, K. Yamashita, anf Y. Yoshii, *Astrophys. J. Lett.* **361** (1990) L1.
5) D.N. Spergel *et al. Astrophys. J. Suppl.*, **148** (2003) 175; **170** (2007) 377.
6) A.G. Riess *et al. Astrophys. J.* **607** (2004) 665.
7) M. Bordag, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko, *Phys. Rept.* **353** (2001) 1.
8) B. Ratra and P.J.E. Peebles, *Phys. Rev.* **D37** (1988) 3406; T. Chiba, N. Sugiyama, and T. Nakamura, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **289** (1997) L5; R.R. Caldwell, R. Dave, and P.J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 1582; P.J. Steinhardt, L. Wang, and I. Zlatev, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 123504.
9) 前田恵一「重力理論入門」第 16 回，数理科学（2007 年 12 月号）.
10) 前田恵一「重力理論入門」第 17 回，数理科学（2008 年 2 月号）.
11) G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, *Phys. Lett.* **B485** (2000) 208.
12) M. Milgrom, *Astrophys. J.* **270** (1983) 365, 371, 384.
13) J. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 083509; *Erratum-ibid.* **D71** (2005) 069901.
14) D. Clowe *et al. Astrophys. J. Lett.* **648** (2006) L109.
15) J.D. Anderson *et al. Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 2858; *Phys. Rev.* **D65** (2002) 082004.
16) G.A. Krasinsky and V.A. Brumberg, *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **90** (2004) 267.

（まえだ・けいいち，早稲田大学理工学術院）

ゲーム理論講義 第15回

シャープレイ値

船木 由喜彦

今回は協力ゲームの仁以外のもう一つの1点解として有名なシャープレイ値を紹介する．シャープレイ値も多くの応用があり，また，現在でも盛んに理論的な研究が進んでいる．

15.1 シャープレイ値の定義

各プレイヤーがランダムな順番で到着し，提携に参加したとき，プレイヤーが獲得できる利得の期待値を考える．各プレイヤーは順番にゲームに参加したとき，自分が参加することにより，それまでの提携値から増加した差の部分，すなわち，自分の貢献度を獲得できると考えてみよう．プレイヤーの貢献度は次の式で定義される．提携 S $(i \in S \subseteq N)$ に対するプレイヤー i の**限界貢献度**（貢献度）とは，$v(S) - v(S \setminus \{i\})$ である．プレイヤー集合 N 上のすべての順列 π を考える．その順列 π の下で，プレイヤー i を含めてそれ以前のメンバーの集合を $S_{\pi,i}$ と書くことにしよう．すなわち，$S_{\pi,i} = \{k \in N | \pi(k) \leq \pi(i)\}$ である．このとき，プレイヤー i の獲得する限界貢献度の期待値 $\phi_i(v)$ は

$$\phi_i(v) = \sum_{\pi \in \Pi} \frac{1}{n!}\Big(v\big(S_{\pi,i}\big) - v\big(S_{\pi,i} \setminus \{i\}\big)\Big) \tag{15.1}$$

で与えられる．ここで，Π はすべての順列の集合である．この期待値は，その提案者の名前にしたがい，プレイヤー i の**シャープレイ値**と呼ばれる．

i の前に提携 S が生じ，i の後に，提携 $N \setminus (S \cup \{i\})$ が生ずる場合を考えよう．このような場合が生ずる順列の数は，$s = |S|, n = |N|$ としたとき，$s!(n-s-1)!$ で与えられるので，シャープレイ値 $\phi_i(v)$ は次の式とも一致する．

$$\phi_i(v) = \sum_{S:i \in S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\Big(v(S) - v\big(S \setminus \{i\}\big)\Big). \tag{15.2}$$

シャープレイ値の興味深い点は，シャープレイ値の利得ベクトルを与える関数が次の 4 つの公理を満たすただ一つのものとして特徴づけられる点である．

それでは，初めにいくつかの定義をしよう．

$$\text{プレイヤー } i \text{ がナルプレイヤー} \iff v\big(S \cup \{i\}\big) = v(S),\ \ \forall S \subset N \setminus \{i\},$$
$$\text{プレイヤー } i \text{ と } j \text{ が対称} \iff v\big(S \cup \{i\}\big) = v\big(S \cup \{j\}\big),\ \ \forall S \subset N \setminus \{i, j\},$$
$$\text{ゲーム } v \text{ とゲーム } w \text{ の和ゲーム } v+w \iff (v+w)(S) = v(S) + w(S),\ \forall S \subseteq N.$$

ゲーム (N, v) にただ一つの利得ベクトルを対応させる関数（ゲームの値）$\phi(v) = \big(\phi_1(v), \phi_2(v), \cdots, \phi_n(v)\big)$ に対し，その満たすべき公理として次の 4 つを考える．

公理 1 ［全体合理性公理］：$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$.
公理 2 ［ナルプレイヤー公理］：ナルプレイヤー i に対し，$\phi_i(v) = 0$.
公理 3 ［対称性公理］：対称なプレイヤー i と j に対し，$\phi_i(v) = \phi_j(v)$.
公理 4 ［加法性公理］：任意のゲーム v, w に対し，

$$\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w),\ \forall i \in N.$$

それぞれの公理は次のように解釈することができる．**全体合理性公理**は利得ベクトルがパレート最適性の条件を満たすという標準的な公理である．**ナルプレイヤー公理**は，ゲームに参加しても全く影響力を持たないプレイヤー（**ナルプレイヤー**）の利得はゼロであることを要請している．**対称性公理**は，2 人のプレイヤーの他の人たちに対する影響が全く同じ場合，彼らが同じ利得を得ることを要請している．**加法性公理**は，数学的には 2 つのゲームの和ゲームに対する利得ベクトルはそれぞれのゲームに対する利得ベクトルの和になるという公理であるが，これは，2 つの状況を表すゲーム v, w から，その状況を総合的に表すゲーム $v + w$ の解が，それぞれの解から別々に計算できることを表している．言い換えると個々の成分となるゲームをそれぞれ独立のものと考えている．これらの 4 つの公理を満たすベクトル値関数としてシャープレイ値は特徴づけられる．

15.2 存在証明といくつかの重要な性質

定理 15.1　公理 1 から公理 4 を満たすゲーム (N, v) に利得ベクトルを対応させる関数はシャープレイ値 $\phi(v) = \big(\phi_1(v), \phi_2(v), \cdots, \phi_n(v)\big)$ のみである．

証明　シャープレイ値がパレート最適性以外の公理を満たすことを示すのは容易であるので読者自ら確かめていただきたい．

パレート最適性の証明は式 (15.1) を用いる．

$$\begin{aligned}\sum_{i \in N} \phi_i(v) &= \sum_{i \in N} \sum_{\pi \in \Pi} \frac{1}{n!} \Big(v\big(S_{\pi,i}\big) - v\big(S_{\pi,i} \setminus \{i\}\big) \Big) \\ &= \sum_{\pi \in \Pi} \frac{1}{n!} \sum_{i \in N} \Big(v\big(S_{\pi,i}\big) - v\big(S_{\pi,i} \setminus \{i\}\big) \Big)\end{aligned}$$

$$= \sum_{\pi \in \Pi} \frac{1}{n!}\Big(v(N) - v(\emptyset)\Big) = v(N).$$

続いてシャープレイ値の一意性を証明しよう．$T \subseteq N, T \neq \emptyset$ とし，T **全員一致ゲーム**と呼ばれるゲームを次のように定義しよう．

$S \supseteq T$ のとき $u^T(S) = 1$，それ以外のとき $u^T(S) = 0$.

［傍注1］　証明は例えば文献 1, 2) を参照.

このとき，$\{u^T\}_{\emptyset \neq T \subseteq N}$ はゲーム空間 $\mathcal{R}^{2^n-1}$ における基底となる[傍注1]．ここで，ゲーム空間とは $2^n - 1$ 次元ベクトル $\big(v(S)\big)_{\emptyset \neq S \subseteq N}$ を一つのゲーム v と同一視することから導かれるユークリッド空間であり，ベクトル和は和ゲームに対応し，ベクトルのスカラー倍は次のスカラー倍ゲーム cv：$cv(S) = c \cdot v(S)$, $\forall S \subseteq N$ に対応する．したがって，任意のゲーム v は適当な係数 c_T $(\emptyset \neq T \subseteq N)$ によって $v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} c_T \cdot u^T$ と一意に表すことができる．したがって，ゲーム $c_T u^T$ に対して $v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N}(c_T u^T)$ が成り立つ．

φ を公理 1 から公理 4 を満たすベクトル値関数であるとする．ゲーム $c_T u^T$ の $\varphi(c_T u^T)$ のベクトル値は公理から次のように求めることができる．プレイヤー $i \in N \setminus T$ はこのゲームのナルプレイヤーであるので，公理 2 から $\varphi_i(c_T u^T) = 0$ である．また，各プレイヤー $j, k \in T$ は互いに対称であるので，公理 3 から $\varphi_j(c_T u^T) = \varphi_k(c_T u^T)$ を得る．そこで，その値を q と置く．公理 1 から $0 + |T|q = c_T u^T(N) = c_T$ であるので，$q = \frac{c_T}{|T|}$ より各プレイヤー $j \in T$ について $\varphi_j(c_T u^T)$ の値が定まる．すなわち，各 $c_T u^T$ に対し，$\varphi(c_T u^T)$ は確定する．公理 4 より $\varphi(v) = \varphi\Big(\sum_{\emptyset \neq T \subseteq N}(c_T u^T)\Big) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \varphi(c_T u^T)$ であるから $\varphi(v)$ も確定し，しかも，v の表現は一意であるから，$\varphi(v)$ のベクトル値は一意に確定する．シャープレイ値は 4 つの公理を満たすので，$\varphi(v)$ はシャープレイ値でなければならない．　（証明終）

この証明から，すべての T 全員一致ゲーム u^T のシャープレイ値が，$i \in T$ のとき $\phi_i(u^T) = \frac{1}{|T|}$, $i \in N \setminus T$ のとき $\phi_i(u^T) = 0$ であることがわかる．また，シャープレイ値はゲーム空間において線形性 $\phi(\alpha v + \beta w) = \alpha\phi(v) + \beta\phi(w)$ を満たすことも明らかである．

定理 15.2　戦略的に同等な 2 つのゲーム (N, v) (N, v') のシャープレイ値は配分の間の変換

$$x'_i = \alpha x_i + \beta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

によって一対一に対応する．

証明　ゲーム w^{β_i} を $S = \{i\}$ のとき $w^{\beta_i}(S) = \beta_i$, $S \neq \{i\}$ のとき $w^{\beta_i}(S) = 0$ と定義し，$v' = \alpha v + \sum_{i \in N} w^{\beta_i}$ とする．このとき，ゲーム v と v' は戦略的に同等になり，シャープレイ値の線形性から，$i \in N$ に対し，

$$x'_i = \phi_i(v') = \alpha\phi_i(v) + \sum_{k \in N} \phi_k(w^{\beta_i}) = \alpha x_i + \beta_i$$

を得る．　（証明終）

定理 15.3　ゲームが優加法性を満たすとき，シャープレイ値は配分になる．

証明　再び，式 (15.1) を用いる．ゲームが優加法性を満たすと，すべての $i \in N$, $\pi \in \Pi$ に対して $v(S_{\pi,i}) - v(S_{\pi,i} \setminus \{i\}) \geq v(i)$ が成り立つ．したがって，

$$\phi_i(v) = \sum_{\pi \in \Pi} \frac{1}{n!}\Big(v(S_{\pi,i}) - v(S_{\pi,i} \setminus \{i\})\Big) \geq \sum_{\pi \in \Pi} \frac{1}{n!} v(i) = v(i)$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

15.3 シャープレイ値の計算

前回の 3 人ゲームの例

$$v(ABC) = 30, \quad v(AB) = 0, \quad v(AC) = 10,$$
$$v(BC) = 20, \quad v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

を式 (15.2) とパレート最適性を用いて計算してみよう．シャープレイ値を $\phi(v) = \big(\phi_A(v), \phi_B(v), \phi_C(v)\big)$ とすると，

$$\begin{aligned}
\phi_A(v) &= \frac{0!2!}{3!}\big(v(A) - v(\emptyset)\big) + \frac{1!1!}{3!}\big(v(AB) - v(B)\big) \\
&\quad + \frac{1!1!}{3!}\big(v(AC) - v(C)\big) + \frac{2!0!}{3!}\big(v(ABC) - v(BC)\big) \\
&= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot (30 - 20) = \frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 10 = 5, \\
\phi_B(v) &= \frac{0!2!}{3!}\big(v(B) - v(\emptyset)\big) + \frac{1!1!}{3!}\big(v(AB) - v(A)\big) \\
&\quad + \frac{1!1!}{3!}\big(v(BC) - v(C)\big) + \frac{2!0!}{3!}\big(v(ABC) - v(AC)\big) = 10, \\
\phi_C(v) &= v(ABC) - \phi_A(v) - \phi_B(v) = 30 - 5 - 10 = 15.
\end{aligned}$$

この例ではシャープレイ値は，前回のカーネル，前々回の仁と一致している．しかしながら，常にこの一致が生ずるわけではない．タルムードのもう一つの例である残された財産が 20 万円のときのゲーム

$$v(ABC) = 20, \quad v(AB) = 0, \quad v(AC) = 0,$$
$$v(BC) = 10, \quad v(A) = v(B) = v(C) = 0$$

を考えてみよう．シャープレイ値は式 (15.1) に基づき，表 15.1 で求めることができる．

表 15.1 より求められたシャープレイ値 $(\frac{10}{3}, \frac{25}{3}, \frac{25}{3})$ はタルムードの結果，すなわちゲームの仁 $(5, \frac{15}{2}, \frac{15}{2})$ と異なっている．

最後に 3 人ゲームのシャープレイ値の計算方法をまとめておくと

$$\phi_A(v) = \frac{1}{3}\big(v(ABC) - v(BC)\big) + \frac{1}{6}\big(v(AB) - v(B) + v(AC) - v(C)\big) + \frac{1}{3}v(A),$$

$$\phi_B(v) = \frac{1}{3}\big(v(ABC) - v(AC)\big) + \frac{1}{6}\big(v(AB) - v(A) + v(BC) - v(C)\big) + \frac{1}{3}v(B),$$

表 15.1　3 人ゲームのシャープレイ値の表による計算.

順列	A の貢献度	B の貢献度	C の貢献度	貢献度の和
ABC	$v(A)=0$	$v(AB)-v(A)=0$	$v(ABC)-v(AB)=20$	$v(ABC)=20$
ACB	$v(A)=0$	$v(ABC)-v(AC)=20$	$v(AC)-v(A)=0$	$v(ABC)=20$
BAC	$v(AB)-v(B)=0$	$v(B)=0$	$v(ABC)-v(AB)=20$	$v(ABC)=20$
BCA	$v(ABC)-v(BC)=10$	$v(B)=0$	$v(BC)-v(B)=10$	$v(ABC)=20$
CAB	$v(AC)-v(C)=0$	$v(ABC)-v(AC)=20$	$v(C)=0$	$v(ABC)=20$
CBA	$v(ABC)-v(BC)=10$	$v(BC)-v(C)=10$	$v(C)=0$	$v(ABC)=20$
合計	20	50	50	120
平均	$\frac{10}{3}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{25}{3}$	20

$$\phi_C(v)=\frac{1}{3}\big(v(ABC)-v(AB)\big)+\frac{1}{6}\big(v(AC)-v(A)+v(BC)-v(B)\big)+\frac{1}{3}v(C)$$

となる.

15.4 費用分担問題のシャープレイ値

シャープレイ値は第 9 回で紹介した費用分担問題にもよく応用される．費用ゲーム (N,c) のシャープレイ値 $\phi(c)$：

$$\phi_i(c)=\sum_{S:i\in S\subseteq N}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\Big(c(S)-c\big(S\setminus\{i\}\big)\Big)$$

を提携形ゲームと同様に対応する 4 つの公理を満たすベクトルとして定義することができる．$\phi(c)$ は，(N,c) から生成される費用節約ゲーム (N,v) のシャープレイ値 $\phi(v)$ と式 $\phi_i(c)=c(\{i\})-\phi_i(v)$ で対応している.

次の費用分担問題のシャープレイ値を計算してみよう.

ある，電気・ガス・石油などのエネルギーの供給源があり，そこからいくつかの工場が協力して，自工場にそれらの資源を供給するためのネットワークあるいはパイプラインを敷設することを計画している．このとき，これらの工場の間でどのようにその敷設費を分担するのがよいだろうか．シャープレイ値を使って求めてみよう.

説明の簡単化のために，供給源 0 から順番に $1,2,3,\cdots,n$ という名前の工場（プレイヤー）が直線上に並んでおり，建設費は 0–1 間は c_1，1–2 間は $c_2,\cdots$，$(k-1)$–k 間は c_k $(k=1,2,\cdots,n)$ というように与えられているものとする．さらに，ある工場 k に資源を供給するためにはそこに到達するまでのすべてのパイプ（ネットワーク）が必要であるとする．このときの総建設費 $\sum_{k=1}^{n}c_k$ の費用分担問題を表す費用ゲーム (N,c) は次のように表すことができる.

$$N=\{1,2,\cdots,n\},\quad c(S)=\sum_{k=1}^{\hat{s}}c_k,$$

ここで，$\hat{s}=\max_{i\in S}i$ である.

この費用ゲームのシャープレイ値を考えてみよう．次のようなゲーム (N,c^k) を考える.

$$S \subseteq \{1, 2, \cdots, k-1\} \text{ のとき } c^k(S) = 0, \quad \text{そうでないとき } c^k(S) = c_k.$$

このとき，$c = \sum_{k=1}^{n} c^k$ となり，各ゲーム c^k のシャープレイ値はプレイヤー $1, 2, \cdots, k-1$ がすべてナルプレイヤーであり，プレイヤー $k, k+1, \cdots, n$ はすべて互いに対称であることから

$$\phi_i(c^k) = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \cdots, k-1,$$

$$\phi_i(c^k) = \frac{c^k(N)}{n-k+1} = \frac{c_k}{n-k+1} \quad \text{for} \quad i = k, k+1, \cdots, n$$

となる．したがって，加法性公理から

$$\phi_i(c) = \phi_i\left(\sum_{k \in N} c^k\right) = \sum_{k=1}^{i} \frac{c_k}{n-k+1}$$

となる．工場が直線上に並んでいない次のような拡張した例を考えてみよう．工場の配置は図 15.1 で表され，同じ地点に 2 つの工場がある場合もある．なお，パイプの敷設はこのような配置しかなく，例えば供給源と工場 3 を直線で結ぶことはできないものとする．

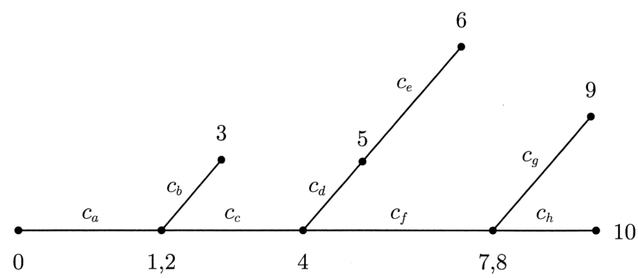


図 15.1　費用分担問題の例（$n = 10$）．

この 10 社の費用分担問題のシャープレイ値は

$$N = \{1, 2, \cdots, 10\}, \quad \phi_1(c) = \phi_2(c) = \frac{c_a}{10},$$

$$\phi_3(c) = \frac{c_a}{10} + c_b, \quad \phi_4(c) = \frac{c_a}{10} + \frac{c_c}{7}, \quad \phi_5(c) = \frac{c_a}{10} + \frac{c_c}{7} + \frac{c_d}{2},$$

$$\phi_6(c) = \frac{c_a}{10} + \frac{c_c}{7} + \frac{c_d}{2} + c_e, \quad \phi_7(c) = \phi_8(c) = \frac{c_a}{10} + \frac{c_c}{7} + \frac{c_f}{4},$$

$$\phi_9(c) = \frac{c_a}{10} + \frac{c_c}{7} + \frac{c_f}{4} + c_g, \quad \phi_{10}(c) = \frac{c_a}{10} + \frac{c_c}{7} + \frac{c_f}{4} + c_h,$$

となるが，その求め方は，直線上のケースと同様であるので，読者自ら確かめていただきたい．このように，シャープレイ値はゲームを単純なゲームの和に分解して，そのゲームのシャープレイ値から求める方法が有効な場合がある．また，これは飛行場における滑走路の離発着コストの費用分担問題に応用することができる．詳しくは，文献 1) を参照していただきたい．

参考文献

1)　岡田　章『ゲーム理論』有斐閣 (1998).
2)　Owen, G., *Game Theory, 3rd editions*, Academic Press (1995).

（ふなき・ゆきひこ，早稲田大学政治経済学術院）

イノベーションの創発ネットワーク

光触媒研究におけるコミュニティ形成とその機能

七丈 直弘・馬場 靖憲

1. はじめに

現在, 政策, また, 企業経営の最重要課題としてイノベーションの振興がある. 特に, バイオ医薬, ナノテク等, 研究で得られる知識が重要な役割を果たすサイエンス型イノベーションの場合, 知的資源が企業の競争力に対して重要な役割を果たすことに加え, 企業が組織外から知識を調達することの必要性が指摘されている. 産学官が複雑な連携を結ぶことによって, 知識がどのように生成・移転されてイノベーションが実現されるに至ったか, 組織を越えた知識創出に注目する研究が進展している.

このような研究を進める上で, アクター間に構築される知識創造システムとして, 社会ネットワークに着目する問題意識は多くの研究者に共有されている. 組織間, また, 個人間のネットワークに注目し, 知識の生成・移転を定量分析する研究が近年多数生まれている. 著名な業績としては, 米国のバイオ医薬の産業化に深くコミットする大学・企業・支援組織が情報共有の場に広く参加し, そこでイノベーションに関する組織の壁を超えたネットワーク学習が機能した可能性を示唆するPowell等の研究[8]や, 同じくバイオ医薬産業を対象に, 企業が卓越した研究業績を持つ「スター科学者」と連携することがイノベーションに関して決定的な役割を果たすことを明らかにしたZuckerとDarbyの研究がある[9]. Powellは近年, サンタフェ研究所で行った共同研究において, 自ら定義する「場」の概念を利用することにより, ネットワークが構造変化するに従ってネットワークの形成メカニズムが時間的に変化し,「場」を構成するアクターに異なる影響を与えることを示している[7].

この小稿では, イノベーション研究におけるネットワーク理論の適用の現状について簡単に述べた後, 筆者らが進めている研究を紹介したい.

2. イノベーションとは何か?

日本社会は成熟するにつれ, 従来の製造業を中心とした産業構成から, サービス業や知識型産業を中心にした産業構成にシフトしつつある. そこで, イノベーションを起こすことで, 比較優位を獲得することの重要性が近年認識されてきた.

イノベーションの実現にはどのような技術を生み出すかだけではなく, その技術の代替的技術にどのようなものがあるか (技術機会の問題), またそれに対するニーズが市場にあるか (市場機会の問題), などのように様々な要因*1)が関係している.

*1) イノベーションは技術に限った言葉ではないが, ここでは特に技術に関して述べている. なお, イノベーション研究の

他社が行っている研究開発の内容は容易には知ることができないし，マーケットも急速に変化するため，これら戦略策定上の条件には大きな不確実性が介在する．また，技術を生み出そうとしても，発明は投下した資源の量に応じて生産されるわけではなく，ここにも大きな不確実性がある．これらの不確実性にもかかわらず，企業は研究開発や組織の革新などによってイノベーションを実現することを求める．それは，世界規模で競争が行われ，情報や技術の流れが加速した今日の世界では，イノベーションを通じた競争力の向上なくしては生き延びることができないからである．そこで，イノベーションを成功させるための要因を分析することで，それを成功させるための確率を少しでも改善することが求められている．

サイエンス型産業と呼ばれる，先端的な科学技術と製品開発が密接に結びついた領域においては，研究開発をより効果的に進めることが，イノベーションを実現する上で大きな役割を果たす．また，サイエンス型産業以外の産業でも，知識が戦略上重要な意味を持つ領域は幅広い．そのため，イノベーション研究の一部として，知識創造のメカニズムの分析が行われるようになった．

3. 知識生産の諸相

組織において創出された知識は，様々な形で組織内に蓄積される．この知識の量と質を量ることができれば，企業の研究開発の実態を正確に把握できる可能性がある．また，それをイノベーションの成否と突き合わせることで，イノベーションを可能にする研究開発戦略のあり方が判明する可能性もある．

知識を分類する方法の一つに，言語によって表現が容易な形式知と，それが困難な暗黙知に分類する方法がある．暗黙知はその定義上，量を直接測ることはできないが，形式知であれば，その量を計測できる可能性がある．

例えば，企業は知識創出のために多額の研究開発投資を行っているのだから，第三者に無断で知識を利用されることがないように，生み出された知識はできるだけ法的保護を講じることでそこから生み出される利益を専有したいと考える．よって，形式知であれば，知的財産権として保護されるような，特許など[*2)]の登録を行うことで保護しようとするだろう．だから，それらの権利の量や質を量ることができれば，知識の量を推定できるかもしれない．

しかし，科学に対するインパクトが大きな発見などは，論文として公開することで，研究開発能力をアピールするケースもある．だから，論文の量と質も，知識生産に加えれば，より正確に知識の量を算出できそうだ．

しかし，以上のような形で公開するということをせず，トレードシークレット（営業秘密）[*3)]などとして厳重に管理する知識もあるだろう．また，特許などの権利主張を行うには一定のコストがかかる（出願・審査請求・登録・権利維持の各段階でコストがかかる）ため，それら費用を上回る便益が提供されない知識は，実験メモやノウハウなどとして組織内に蓄積するものの，外部からはその存在を知ることは困難だ．

以上のような状況から，第三者が外部に公開された情報を基にして算出できるのは，知識全体の一部にすぎなく，特に，論文や特許などによって体現された知識に限られる．

しかし，特定の産業領域では，特許化された知識の価値が，生産された知識の価値の主要な部分を表現している場合がある．例えば，バイオテクノロジー産業では，ある特定の発明が，効果の高い薬品の製造を導き，それが特許化されることによって莫

元祖とも言える Schumpeter はイノベーションを次の 5 種類に分類した[10]．① 新しい財貨（製品），② 新しい生産方法，③ 新しい販路の開拓，④ 原料あるいは半製品の新しい供給源の獲得，⑤ 新しい組織の実現．現代ではこの分類に含まれないイノベーションの事例も多い（新しいアルゴリズムなどはその一例）．

*2)　ここでは特許に加え，実用新案や意匠登録を合わせて，「特許など」と表現している．

*3)　有名な例として，コカ・コーラのレシピが知られる．それ以外にも，外部に非公開とされているような生産工場などはトレードシークレットの例．

大な収益をもたらすケースがある．また，サイエンス型産業では，研究開発のみを行って，製品生産を行わない「研究開発専業企業」も存在する．そのような企業は特許化された技術のライセンシングによって，収益を得ている．このような例は，サイエンス型産業における，知的財産の重要性を示すと同時に，特許・論文などの知的財産の評価によって，戦略分析を行うことの有効性を示唆するだろう．

4. 知識生産とコラボレーション

組織は研究活動を進めることによって知識生産を行うが，知識の源泉は，組織の内部だけでなく，外部にも存在する．特に，先端的領域においては，研究に要するコストが高額になったり，複数の専門領域をまたがる場合も多いため，共同研究が頻繁に行われている．また，先端的領域においては，大学などの学術的な組織が主要な新知識の供給源である場合も多く，そのような組織との連携（共同研究，委託研究など）や，学術論文の出版や学会への参加を通じた学術コミュニティへの参加も重要な意味を持つ．

米国のバイオテクノロジー産業を対象とした，Zucker と Darby の研究[9]では，バイオテクノロジー産業の黎明期においては，起業に必要な先端的知識を保有するのは大学で研究を行う優れた研究者（彼女たちはそれを「スター科学者」と名付けた）に限られていたため，スター科学者との連携を構築することが，起業を成功させる上で重要な意味をもったと分析している．最先端の発見は，学術論文などとして公開されてはいるものの，実際に論文に体現されているような知識を自らのものとするには，十分な知識と経験が必要だ．単に論文を読み込むだけでは不十分であるため，知識生産者との直接的連携の構築が重要だったのである．

また，Powell らの研究[8]では，自ら米国のバイオテクノロジー企業間での連携状況に関するデータベースを作成し，この産業が発生した初期の段階では，共同研究を通じた，企業間のコラボレーションネットワークにおけるネットワーク中心性の向上が，企業に対して豊富な学習の機会を提供し，その結果，企業成長がもたらされたことを示した．同時にこの論文は，企業戦略を考える上での，ネットワーク的思考の有効性を，イノベーション研究の領域において，広く知らしめることにつながった．

一方，Burt はその著書[6]において，アクターは複数の互いに分断されたクラスターを結ぶ結節点[*4]に自ら位置することにより，異なるクラスター間での情報の流れを制御することができるため，戦略的優位性を持つと考えた．ネットワーク理論から見ると，このような発想と，ネットワーク中心性の増加が成長に寄与するという考えは，互いに相反する面を持つ．確かに，Powell らが主張するように，多数の組織と連携を行うことは，その関係を維持するために要するコストがかさむはずであり，常に良好な結果をもたらすわけではないだろう．逆に，関係構築を盛んに行う組織との間に直接的な連携を構築し，その他の組織との間には間接的な連携を維持したほうが，より少ない費用でより多くの知識を享受することができ，戦略的優位性を持つかもしれない．

そこで Ahuja は[1]，ネットワーク中心性と構造的空隙が特許生産性にいかなる影響を及ぼしているかを分析し，各々の寄与を比較した．そのために，化学産業に関して，企業間の連携状況に関するデータベースを作成し，ネットワーク構造変化に起因するネットワーク指標の変化を，特許生産性に関連付けた．その結果，直接的な連携も，間接的な連携も特許生産に貢献するものの，直接的な連携が増加するに従って，間接的な連携の影響が減少することが認められた．また，構造的空隙に関して言えば，それが増加することが特許生産の減少につながることから，Powell らが示した結果を再び支持することとなった．しかし，これらは限られた産業領域で確認されたことであり，また産業の成熟度によっても結果は大きく異なるはずだ．

---

*4) Burt はこのような位置を構造的空隙（“Structural Hole”）と定義した．

5. イノベーション研究とネットワークの接近

既に見てきたように，現在では，イノベーション研究とネットワークは極めて密接な関係を持っている．しかし，その接点には，それほど深い歴史があるわけではない．ここで，マクロな視点からイノベーション研究とネットワーク的発想の関連を時系列的に見てみよう．

論文書誌データベースポータルである Web of Science（Thomson Scientific 社）から，人文社会系の論文誌を収録したデータベースである SSCI（Social Science Citation Index）を検索した結果，題目・キーワード・概要に “innovation” という語を含む論文は執筆の時点*5)において，22,440 件あった．また，同様にして “innovation” と “network” という 2 つの語を含む論文は 2,328 件あった．これらの年ごとの数の推移を比較した結果を図 1 に示している．ネットワークに関連した論文は 1956 年以降に出現している．しかしその数は 1990 年まで極めて少なく，それ以降に急速な伸びを見せている．この 1990 年以降における，急速な論文数の伸びの多くは，分野全体の拡大（あるいは，SSCI に収録される論文誌の拡大を通じた論文数の増加）に由来する部分が大きいものの*6)その増加率は著しい．

さらに，論文の質を測定するのに有効だと考えられている被引用数に着目すると，より詳細に状況が見えてくる．イノベーション関連の論文における被引用数の平均は 7.48 であるのに対し，イノベーションとネットワークの両者に関連する論文の被引用数の平均は 9.65 とかなり高い*7)．この事実は，論文がより多く引用され，知識が急速に伝播し，ネットワークに関連したイノベーション研究という研究分野が拡大しているであろうことを想像させる．

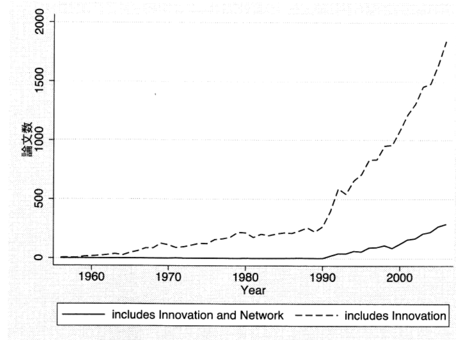


図 1 “innovation” と “network” を含む論文数の変化．

6. 光触媒分野におけるネットワーク形成とその機能

筆者らは，サイエンス型イノベーションに関与する一連の組織がどのような研究能力を持ち，どのように連携することによって知識を生成・移転してイノベーションを実現したか，光触媒分野を対象に組織の研究活動を実証分析してきた[2~4,11]．米国と対照的に，日本の大学システムにおいては大学と連携する企業が具体的な市場成果をもたらすことが少ない．しかし，本節が紹介する光触媒分野は，産学連携からイノベーションが生まれた日本においては希有の例である．同分野で産学連携の中核を担った東京大学の藤嶋昭名誉教授と橋本和仁教授の産業界への貢献は社会的に高く評価されており，両教授は科学と技術にわたる旺盛な研究活動に加え，光触媒に関する研究会を組織化し研究人材の育成と研究コミュニティの拡大にも極めて熱心であった．その結果，光触媒分野では大学をコーディネーターとする産学官連携によって研究

*5) 2007 年 11 月初旬に本稿を執筆している．

*6) 実際，“innovation” と大いに関連する概念の一つである “management” という語を含む論文を検索した結果と比較してみると “network” に比べてその伸びは少ないものの，やはり 1990 年以降に急速に増加している傾向が認められる．

*7) それでも読者は「そもそも，ネットワークに関連したイノベーションに関する論文と，ネットワークに関連しないがイノベーションに関する論文とでは，それが出版されるジャーナルあるいは学問領域が異なっているため，被引用数が相違するのではないか」と思われるかもしれない．Science Citation Index では “subject code” と呼ばれる項目が書誌情報に含まれている．これは，（若干の例外を除き）ジャーナルごとに Thomson Scientific によって決定された，研究分野を示すコードであり，論文のジャンルをある程度推測できる．これを用いて，各々の集合に含まれる論文のジャンルを比較したが，その頻度分布は，極めて高い一致を見せたことから，ネットワークに関連したイノベーションに関する論文が高い被引用数を持つことは確かなようである．

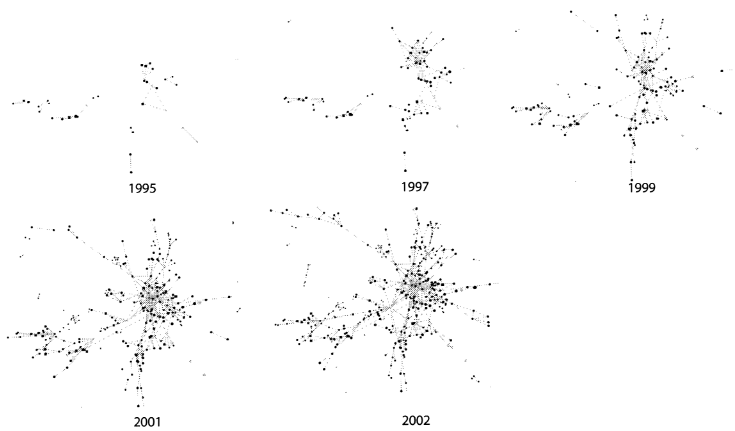


図 2　光触媒分野の特許共同出願ネットワークの成長.

開発から生産プロセス開発にわたる一連の活動が連結され，市場化に向けて試行錯誤が展開された．本節では，光触媒分野で活動する産学官を対象にネットワーク分析を行い，産学官に形成された研究開発ネットワークがイノベーションにどのような効果を与えたか，考察した結果の一部を報告する．

既に紹介した Powell らの研究[8]や Ahuja の研究[1]では，独自に構築した企業間連携のデータベースがあったからこそ，ネットワーク分析が可能になった．しかし，そのようなデータは全ての技術領域に関して，系統的に存在するわけではない[*8]．だが，先端産業においては特許が戦略に占める重要性が極めて高いため，組織が保有する特許に関する情報を分析することによって，ある程度，組織間の連携の構造を知ることができると考えられる．そこで，筆者らは，特許出願における発明人や出願人の情報を用いて共同開発の状況を調査し，ネットワーク構造を導いた[4]．その結果得られたネットワークを可視化[5]した結果を，図 2 に示す．

ネットワーク構造の変化を組織の次数中心性に注目して時系列的に観察すると，1990 年代初頭には藤嶋・橋本とネットワークにおいて同様な位置を占める複数の大学研究室が存在した．しかし，次第に，産業界においては東陶機器を中心とするコア企業，大学においては藤嶋・橋本両教授，そして，公的機関においては JST（科学技術振興機構）と工業技術院（現在の産業技術総合研究所）等のネットワーク中心性が増大し，1996–1997 年時点において藤嶋・橋本両教授は日本の研究開発ネットワークにおけるハブの位置につき，その位置は安定的に推移した．一方，公的支援機関としての JST は近年，光触媒研究開発コミュニティにおいて，複数のクラスター同士を結合する構造的空隙となっていることが，ネットワーク指標の分析から判明している．この事実から，JST は光触媒の研究開発に対する支援と，その成功によって，潜在的に情報の流れをコントロールすることができるような，優越的地位を占めていることがわかる．このような位置を公的セクターが担うことによって，研究開発が加速する可能性を示唆している．また，ネットワーク中心性指標が極めて高いアクターである，藤島・橋本と連携を行う企業が製品化に成功して割合が高い[11] ことから，Powell や Ahuja が分析した状況に類似したメカニズムが機能していた可能性がある．

より詳細に分析すると，本節が対象にしてきた産学官の各組織のネットワークにおける地位の向上の背景に，組織間に形成される Win–Win 構造

*8)　Powell が対象としたバイオテクノロジー産業では，資金調達を行う上でアライアンスに関する情報を広報することが重要な役割を持っていた．Ahuja が対象とした化学産業は，上場企業が大勢を占めており，アライアンスについては証券取引委員会へ常に通知されている．しかし，比較的小中規模の企業によって構成される産業では，アライアンス情報を系統的に収集することは困難である．

があると推定できよう．藤嶋・橋本は企業と共同研究を長期間にわたり続行し，企業の人材育成に貢献した．その過程で東陶機器は超親水性を発見し，光触媒ブームを出現させて市場の成長に貢献した．その特許戦略と広報活動は，東陶機器と重要な共願特許を多数持つ藤嶋・橋本の産業界での評判を高め，企業パートナーの増加によって藤嶋・橋本は研究開発コミュニティにおけるハブの地位を確立した．公的支援機関としての JST と KAST（神奈川サイエンスアカデミー）は，支援する藤嶋・橋本，また，コア企業の研究開発に貢献する一方，パートナー組織が順調に研究成果を上げることによって，コミュニティにおける自らの存在価値を確実に上昇させている．以上のような産学連携において参加組織間に Win–Win 構造が出現し，各組織の実績を通じたフィードバックがかかることによって関係が深化し安定化した．この事実は，同分野の研究開発とイノベーションに対して多くの組織が参加する情報共有の場が出現し，そこで光触媒イノベーションに関する組織の壁を超えたネットワーク学習が機能した可能性を示唆している．

7. おわりに

本稿で紹介してきたように，ミクロデータを用いて数理的にイノベーション分析を行うという手法が近年頻繁に用いられるようになり，手法的有効性が確認されてきたが，業績評価の手法やデータの正確性の問題など，課題も多くある．しかし，特許や論文に関する系統的なデータベースの入手が容易となり，数理的分析が広範に行われるようになってからまだ間もないため，発展の余地は大いにあると言えよう．数理的な手法を用いて，イノベーションを分析するという非常に挑戦的なテーマに，多くの若い読者が参加してくれることを願っている．

参考文献

1) G. Ahuja. Collaboration networks, structural holes, and innovation: A longitudinal study. *Administrative Science Quarterly*, Vol.**45**, No.3, pp.425–455, 2000.
2) Y. Baba, N. Shichijo, and Y. Nagahara. The role of core researchers for increasing firms' r&d productivity: the evidence of university- industry collaboration in science-based industry. In *Proceedings of 11th Meeting of International Schumpeter Society*, Sophia-Antipolis, June 2006. International Schumpeter Society.
3) Y. Baba, M. Yarime, Y. Nagahara, and N. Shichijo. The evolution co-inventor networks in advanced matrials: Explaining the technological impact on industrial transformation. In *Proceedings of DRUID Tenth Anniversary Summer Conference 2005 on "Dynamics of Industry and Innovation: Organizations, Networks and Systems"*, Copenhagen, June 2005. Copenhagen Business School.
4) Y. Baba, M. Yarime, N .Shichijo, and Y. Nagahara. The role of university-industry collaboration in new materials innovation: Evolving networks of joint patent applications. In *Proceedings of 10th Meeting of International Schumpeter Society*, Bocconi University, Milan, 2004.
5) I. Bruss and A. Frick. *Fast Interactive 3-D Graph Visualization*, pp.99–110. Lecture Notes in Computer Science, 1027. Springer, 1996.
6) R.S. Burt. *Structural Holes: The Social Structure of Competition.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1992.
7) J. Owen-Smith and W.W. Powell. Knowledge networks as channels and conduits: The effects of spillovers in the boston biotechnology community. *Organization Science*, Vol.**15**, No.1, pp.5–21, 2004.
8) W.W. Powell, K.W. Koput, and L. SmithDoerr. Interorganizational collaboration and the locus of innovation: Networks of learning in biotechnology. *Administrative Science Quarterly*, Vol.**41**, No.1, pp.116–145, 1996.
9) L.G. Zucker and M.R. Darby. Star scientists and institutional transformation: Patterns of invention and innovation in the formation of the biotechnology industry. *Proceedings Of The National Academy Of Sciences Of The United States Of America*, Vol.**93**, No.23, pp.12709–12716, 1996.
10) J.A. シュムペーター．『経済発展の理論』．岩波書店，1977.
11) 馬場靖憲・鎗目雅．緊密な産学連携によるイノベーションへの貢献．馬場靖憲・後藤晃（編），『産学連携の実証分析』，第 3 章，pp.65–96. 東京大学出版会，2007.

（しちじょう・なおひろ，
東京大学大学院情報学環・学際情報学府）
（ばば・やすのり，東京大学先端科学技術研究センター）

特　集（2008年4月号予告）

現代数学はいかに使われているか［解析編］

本体952円

特　集（2008年2月号）

ゲージ重力対応

超弦理論が切り開く現代物理の新地平

本体952円

編集後記

今回の特集は現代物理で必要とされる数学のキーワードを紹介させていただきましたが，いかがでしたでしょうか？

物理で使われる数学は月日が経つとともに増えてきました．そして現在，最先端の物理の世界に旅立つにはそれまでの数学の知識だけでは足りず，今回の特集で挙がっているキーワードが新たなパスポートになっているようです．

この特集を機会に新たなパスポートを携えて最先端の世界を旅してみるのはいかがでしょうか．（大溝）

＊　＊

今回の特集は現代版物理数学とも言える取組みでしたが如何でしたでしょうか．とり上げたトピックは，どれも現代物理に必要と目される先端の数学概念であるだけに，内容はとても濃いと思います．

何が活かせる素材なのか，その選び方は様々ですが，かつてアインシュタインが微分幾何によって一般相対論を完成させたように，こうした数学的素材が新しい物理を拓くきっかけになることをひそかに期待しています．（伊崎）

数　理　科　学　3月号

2008年3月1日発行　　発行人　木　下　敏　孝

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平勢耕介　伊崎修通
大溝良平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社　**サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁